Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 26. September 2007, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Finn en basis for nullrommet $\operatorname{Nul} A$, og angi dimensjonen til dette.

Løsning: Fra **a**) ser vi at $\operatorname{Nul} A$ er gitt ved de vektorer $\mathbf{x}$ som oppfyller

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker de frie variable x_2 og x_4 som parametre og ser at

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det følger at $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for $\operatorname{Nul} A$ og at $\dim \operatorname{Nul} A = 2$.

c) Finn en basis for søylerommet $\operatorname{Col} A$, og angi dimensjonen til dette.

Løsning: Fra **a)** ser vi at 1., 3., og 5., søyle i A er pivoteringssøyler. Disse søylene gir en basis for $\operatorname{Col} A$,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi ser at $\dim \operatorname{Col} A = 3$.

d) Finn den generelle løsningen til ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & & & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 6 \end{array}$$

Løsning: Som i **b**) bruker vi de frie variable x_2 og x_4 som parametre og skriver den generelle løsning på vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

a) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$, og finn en matrise Q slik at $Q\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^4$.

Løsning: Matrisen $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4]$ har determinant lik 1. Dermed er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^4$. Matrisen Q er gitt ved

$$Q = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Bruk Gram-Schmidt ortogonalisering til å finne en ortogonal basis for vektorrommet $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Løsning: La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en ortogonal basis.

c) Finn en 3×4 matrise A som er slik at $\mathrm{Nul}(A) = V^{\perp}$, der V er som i **b**).

Løsning: For eksempel kan A velges til at være matrisen som har rekkevektorer $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, og $\mathbf{b}_3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

d) Finn en basis for $V^{\perp}$.

Løsning:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har likningen

$$3x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_2^2 = 10.$$

Finn en ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's likning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd (“cross-product term”). Skriv likningen for K i det nye koordinatsystemet.

Løsning: La $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$. Vi må finne en ortonomal basis av egenvektorer for A. Vi finner røttene i det karakteriske polynom $\lambda^2 - 7\lambda + 10$ og ser at A har egenverdiene $\lambda = 2$ og $\lambda = 5$.

For $\lambda = 2$ finner vi egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

For $\lambda = 5$ finner vi egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Da $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er enhetsvektorer og A er symmetrisk er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortonomal basis av egenvektorer og i denne basisen har K ligningen $2y_1^2 + 5y_2^2 = 10$.

b) Avgjør hva slags kjeglesnitt K er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Løsning: Da egenverdiene har samme fortegn er K en ellipse. For å tegne K skriver vi ligningen som

$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Vi ser at K er en ellipse som skjærer y_1-aksen for $y_1 = \sqrt{5}$ og y_2-aksen for $y_2 = \sqrt{2}$.

Oppgave 4

a) Finn det karakteristiske polynom for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

og vis at 0, 1 og 2 er egenverdier for A.

Løsning: Det karakteriske polynomet er gitt ved

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Vi sjekker at 0, 1 og 2 er røtter.

$$\begin{aligned} &-0^3 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ &-1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0 \\ &-2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

b) Finn en egenvektor for hver egenverdi.

Løsning:

Egenvektor for $\lambda = 0$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor for $\lambda = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor for $\lambda = 2$: $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Finn en eksplisit formel for A^n, der n er et positivt helt tall.

Løsning: La

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er $A = PDP^{-1}$. For å finne A^n beregner vi

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

og vi finner at

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2^n & 2^n \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2^n & 1 + 2^n \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5

a) Definer rangen $\text{rank}(A)$ til en $m \times n$-matrise A, og angi en formel som relaterer $\text{rank}(A)$ og $\dim \text{Nul}(A)$.

Løsning: Rangen til A er lik dimensjonen til $\text{Col}\, A$, og der gjelder følgende formel

$$\text{rank}\, A + \dim \text{Nul}\, A = n.$$

b) Hvis A er en 4×4 matrise med egenverdiene 0, 1, 2, og 3, hva er da rangen til A? Svaret skal begrunnes.

Løsning: Da det finnes fire ulike egenverdier har hvert egenrom dimesjon lik 1, og da $\text{Nul}\, A$ er egenrommet til 0 er spesielt $\dim \text{Nul}\, A = 1$. Dermed er

$$\text{rank}\, A = 4 - \dim \text{Nul}\, A = 3.$$

c) Vis, at hvis A er en $n \times n$-matrise, da er rangen til A^2 mindre eller lik rangen til A.

Løsning: Antag at $\mathbf{v}$ er en vektor i $\text{Col}\, A^2$. Da finnes en det en vektor $\mathbf{w}$ slik at $\mathbf{v} = A^2\mathbf{w} = A(A\mathbf{w})$, så $\mathbf{v}$ er også i $\text{Col}\, A$. Det følger, at $\text{Col}\, A^2$ er et underrom av $\text{Col}\, A$, og dermed er

$$\text{rank}\, A^2 = \dim \text{Col}\, A^2 \leq \dim \text{Col}\, A = \text{rank}\, A.$$

Christian Schlichtkrull