Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Tirsdag 29. mai 2007, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en basis for nullrommet $\operatorname{Nul} A$, og angi dimensjonen til dette.

c) Finn en basis for søylerommet $\operatorname{Col} A$, og angi dimensjonen til dette.

d) Finn et reelt tall c slik at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & c \end{array}$$

har uendelig mange løsninger. Finn deretter den generelle løsningen av ligningssystemet for denne verdien av c.

Oppgave 2

a) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

b) Den lineære transformasjonen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

Finn standard matrisen til T.

c) Finn $\mathcal{B}$-matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ (matrisen for T relativt til $\mathcal{B}$), hvor $\mathcal{B}$ er basen gitt i **a)**.

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har likningen

$$3x_1^2 - 4x_1x_2 = 1.$$

Finn en ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's likning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv likningen for K i det nye koordinatsystemet.

b) Avgjør hva slags kjeglesnitt K er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 4

a) Finn det karakteristiske polynom for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

og vis at 1, 2 og 3 er egenverdier for A.

b) La D være matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finn en invertibel matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Finn en matrise C som oppfyller at $C^2 = D$, hvor D er matrisen fra **b)**.

d) Bruk resultatene fra **b)** og **c)** til å finne en matrise B som oppfyller at $B^2 = A$. Angi matrisen B eksplisit.

Oppgave 5

a) Gi definisjonen på at en kvadratisk matrise er ortogonal. Gi også definisjonen på at en matrise er ortogonalt diagonaliserbar.

b) La A være en symmetrisk 2×2 matrise med to ulike egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Hvor mange ortogonale 2×2 matriser P finnes det slik at

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}?$$

Svaret skal begrunnes.

c) La A være en $n \times n$ matrise som både er symmetrisk og ortogonal. Vis at $A^2 = I$.

Hans Brodersen　　　　　　Christian Schlichtkrull