Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 24. September 2008, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en basis for nullrommet $\operatorname{Nul} A$, og angi dimensjonen til dette.

c) Finn en basis for søylerommet $\operatorname{Col} A$, og angi dimensjonen til dette.

d) Finn et reellt tall c slik at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & c \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & c \end{array}$$

har uendelig mange løsninger. Finn deretter den generelle løsningen av ligningssystemet for denne verdien av c.

Oppgave 2

a) Kjeglesnittet K har ligningen

$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 2.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv ligningen for K i det nye koordinatsystemet.

b) Avgjør hva slags kjeglesnitt K er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 3

a) Finn determinanten til matrisen

$$M_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & t \\ t & t & t \end{bmatrix}$$

uttrykt ved t. Bruk dette til å finne de reelle tall t som er slik at matrisen M_t er invertibel.

b) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$ og bruk Gram-Schmidt ortogonalisering til å finne en ortogonal basis for underrommet Span$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

c) Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}_3$ på underrommet Span$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

d) La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformasjon slik at

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen til T.

Oppgave 4

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn det karakteristiske polynomet til A og vis at A har egenverdiene -1, 1 og 2.

b) Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Vis at A er invertibel og finn A^{-1}.

d) La $B = A^{-1}$. Finn en eksplisitt formel for B^n, der n er et positivt helt tall.

Oppgave 5

a) La V være et vektorrom. Gi definisjonen av at en mengde av vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ i V er lineært uavhengige.

b) Anta at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige vektorer i et vektorrom V og la

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Avgjør om vektorene $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ er lineært uavhengige.

c) La $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ være vektorer i et vektorrom V og anta at det finnes en lineær transformasjon $T\colon V \to V$ slik at vektorene $T(\mathbf{w}_1)$, $T(\mathbf{w}_2)$, $T(\mathbf{w}_3)$ er lineært uavhengige. Vis at da er også $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ lineært uavhengige.

Christian Schlichtkrull