Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 24. September 2008, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fasit: Den reduserte trappeformen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en basis for nullrommet $\operatorname{Nul} A$, og angi dimensjonen til dette.

$$\textbf{Fasit: } \operatorname{Nul} A \text{ har basis } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ og } \dim \operatorname{Nul} A = 2.$$

c) Finn en basis for søylerommet $\operatorname{Col} A$, og angi dimensjonen til dette.

$$\textbf{Fasit: } \operatorname{Col} A \text{ har basis } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ og } \dim \operatorname{Col} A = 3.$$

d) Finn et reelt tall c slik at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & c \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & c \end{array}$$

har uendelig mange løsninger. Finn deretter den generelle løsningen av ligningssystemet for denne verdien av c.

Fasit: Ligningssystemet har uendelig mange løsninger nettopp når $c = 2$. For denne verdien av c er den generelle løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

a) Kjeglesnittet K har ligningen

$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 2.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv ligningen for K i det nye koordinatsystemet.

Fasit:
La $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Matrisen A har egenverdiene $\lambda = 2$ og $\lambda = 8$.
Ortonormal egenvektor for egenverdien $\lambda = 2$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.
Ortonormal egenvektor for egenverdien $\lambda = 8$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.
I basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ har K ligningen $2y_1^2 + 8y_2^2 = 2$.

b) Avgjør hva slags kjeglesnitt K er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Fasit: Da egenverdiene har samme fortegn er K en ellipse. For å tegne K skriver vi ligningen som

$$\frac{y_1^2}{(1)^2} + \frac{y_2^2}{(1/2)^2} = 1.$$

Vi ser at K er en ellipse som skjærer y_1-aksen for $y_1 = 1$ og y_2-aksen for $y_2 = 1/2$.

Oppgave 3

a) Finn determinanten til matrisen

$$M_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & t \\ t & t & t \end{bmatrix}$$

uttrykt ved t. Bruk dette til å finne de reelle tall t som er slik at matrisen M_t er invertibel.

Fasit: Determinanten er $\det(M_t) = -t(t-1)^2$. Matrisen M_t er invertibel nettopp når determinanten er ulik 0, dvs. for $t \neq 0$ og $t \neq 1$.

b) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$ og bruk Gram-Schmidt ortogonalisering til å finne en ortogonal basis for underrommet $\text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Fasit: Vektorene i $\mathcal{B}$ er søylevektorene til M_t for $t = -1$. Da M_{-1} er invertibel er $\mathcal{B}$ en basis. La

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortogonal basis. (Vi kan også bruke feks. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$).

c) Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}_3$ på underrommet $\text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Fasit: Den ortogonale projeksjonen er gitt ved

$$\hat{\mathbf{b}}_3 = \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformasjon slik at

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn standard matrisen til T.

Fasit: Standardmatrisen A oppfyller $A[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3] = [A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3] = I$ slik at

$$A = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn det karakteristiske polynomet til A og vis at A har egenverdiene -1, 1 og 2.

Fasit: Det karakteristiske polynomet er $\det(A-\lambda I) = \cdots = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$ som har røttene -1, 1, og 2.

b) Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

Fasit:

Egenvektor for $\lambda = -1$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Egenvektor for $\lambda = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor for $\lambda = 2$: $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Matrisene } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ oppfyller betingelsene.}$$

c) Vis at A er invertibel og finn A^{-1}.

Fasit: Matrisen A har determinant $\det A = -2$. Da determinanten er ulik 0 er A invertibel. For å finne A^{-1} bruker vi en metode som også kan brukes i **d)**. Vi beregner først

$$P^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fra **b)** følger da at

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

d) La $B = A^{-1}$. Finn en eksplisitt formel for B^n, der n er et positivt helt tall.

Fasit: Vi bruker metoden fra **c)**:

$$B^n = PD^{-n}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n - 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 1 - 2^{-n} & 2^{-n} - 1 & 2^{-n} \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

a) La V være et vektorrom. Gi definisjonen på at en mengde av vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ i V er lineært uavhengige.

Fasit: Vektorene $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ er lineært uavhengige hvis ligningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$$

kun har den trivielle løsningen $c_1 = \cdots = c_p = 0$.

b) Anta at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige vektorer i et vektorrom V og la

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Avgjør om vektorene $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ er lineært uavhengige.

Fasit: Ligningen $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = 0$ er ekvivalent til ligningen

$$(c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{v}_1 + (c_1 + 2c_2 - c_3)\mathbf{v}_2 + (-c_1 - 2c_2 + c_3)\mathbf{v}_3 = 0.$$

Da ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ c_1 & + & 2c_2 & - & c_3 & = & 0 \\ -c_1 & - & 2c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

har ikke trivielle løsninger, for eksempel $c_1 = -3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$, følger det at vektorene $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ *ikke* er lineært uavhengige.

c) La $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ være vektorer i et vektorrom V og anta at det finnes en linear transformasjon $T\colon V \to V$ slik at vektorene $T(\mathbf{w}_1)$, $T(\mathbf{w}_2)$, $T(\mathbf{w}_3)$ er lineært uavhengige. Vis at da er også $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ lineært uavhengige.

Fasit: Antag at $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 = 0$. Da er

$$0 = T(c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3) = c_1T(\mathbf{w}_1) + c_2T(\mathbf{w}_2) + c_3T(\mathbf{w}_3)$$

og da $T(\mathbf{w}_1)$, $T(\mathbf{w}_2)$, $T(\mathbf{w}_3)$ er lineært uavhengige følger at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Da dette gjelder for alle c_1, c_2, c_3 er vektorene $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ lineært uavhengige.

Christian Schlichtkrull