Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Mandag 2. juni 2008, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

a) Finn de reelle tallene c slik at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & cx_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & -1 \end{array}$$

har uendelig mange løsninger.

b) Finn den reduserte trappeformen for koeffisientmatrisen til ligningssystemet i **a)** for $c = 0$.

c) Finn den generelle løsningen til ligningssystemet i **a)** for $c = 0$.

Oppgave 2

a) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$.

b) Finn en matrise Q slik at $Q\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^4$.

c) La vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ være gitt ved

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, & \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4, \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4, & \mathbf{v}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4. \end{array}$$

Finn en basis for underrommet $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, og angi dimensjonen til dette.

d) La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være en lineær transformasjon slik at

$$T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{v}_1, \quad T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{v}_2, \quad T(\mathbf{b}_3) = \mathbf{v}_3, \quad T(\mathbf{b}_4) = \mathbf{v}_4.$$

Finn $\mathcal{B}$-matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ til T.

e) Finn standard matrisen til den lineære transformasjonen T i **d)**.

f) Avgjør om det finnes en lineær transformasjon $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ slik at

$$S(\mathbf{v}_1) = \mathbf{b}_1, \quad S(\mathbf{v}_2) = \mathbf{b}_2, \quad S(\mathbf{v}_3) = \mathbf{b}_3, \quad S(\mathbf{v}_4) = \mathbf{b}_4.$$

Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har ligningen

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 = 14.$$

Finn en ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv ligningen for K i det nye koordinatsystemet.

b) Avgjør hva slags kjeglesnitt K er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 4

La $M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \end{bmatrix}$ der a og b er reelle tall.

a) Vis at det karakteristiske polynomet til $M_{a,b}$ er gitt ved

$$\det(M_{a,b} - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - (a+b)\lambda - 2).$$

b) Vis at $M_{a,b}$ er diagonaliserbar for alle valg av a og b.

c) For hvilke tall a og b er $M_{a,b}$ ortogonalt diagonaliserbar? Svaret skal begrunnes.

d) La $a = 0$ og $b = 1$. Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$M_{0,1}P = PD.$$

Oppgave 5

a) Gi definisjonen på at en $n \times n$ matrise A er symmetrisk. Vis at dersom A og B er symmetriske $n \times n$ matriser da er $A + B$ symmetrisk.

b) Gitt en symmetrisk matrise A, la $Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ være den tilhørende kvadratiske formen. Vis at for to symmetriske $n \times n$ matriser A og B gjelder at

$$Q_{A+B}(\mathbf{x}) = Q_A(\mathbf{x}) + Q_B(\mathbf{x}).$$

c) Anta at alle egenverdiene for de symmetriske $n \times n$-matrisene A og B er positive. Vis at alle egenverdiene for $A + B$ er positive.

Hans Brodersen

Christian Schlichtkrull