Bokmål

# UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Mandag 2. juni 2008, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

## Oppgave 1

**a)** Finn de reelle tallene $c$ slik at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & cx_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & -1 \end{array}$$

har uendelig mange løsninger.

**Løsning:** Vi reduserer den augmenterte matrisen for ligningssystemet,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & c & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & c & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1-c & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1+c & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & c & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+3c & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at systemet er konsistent nettopp for $c \neq -1/3$. Da det er en fri variabel følger det at systemet har uendelig mange løsninger nettopp når $c \neq -1/3$.

**b)** Finn den reduserte trappeformen for koeffisientmatrisen til ligningssystemet i **a)** for $c = 0$.

**Løsning:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**c)** Finn den generelle løsningen til ligningssystemet i **a)** for $c = 0$.

**Løsning:** Vi reduserer den augmenterte matrisen,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Vi bruker den frie variabel $x_3$ som parameter og skriver løsningen på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Oppgave 2

**a)** La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$.

**Løsning:** Vi beregner determinanten til matrisen $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4]$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Da determinanten er ulik 0 er $\mathcal{B}$ en basis.

**b)** Finn en matrise $Q$ slik at $Q\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^4$.

**Løsning:** La $P = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4]$; da er $Q = P^{-1}$. Vi reduserer matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det følger at $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**c)** La vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ være gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4, \\ \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4, & \mathbf{v}_4 &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4. \end{aligned}$$

Finn en basis for underrommet $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, og angi dimensjonen til dette.

**Løsning:** Vi bemerker at $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ og at $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ slik at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ genererer underrommet. Det er let å se at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og vi konkluderer at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en basis. Dermed er dimensjonen lik 2.

**d)** La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være en lineær transformasjon slik at

$$T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{v}_1, \quad T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{v}_2, \quad T(\mathbf{b}_3) = \mathbf{v}_3, \quad T(\mathbf{b}_4) = \mathbf{v}_4.$$

Finn $\mathcal{B}$-matrisen $[T]_\mathcal{B}$ til $T$.

**Løsning:** Vi kan avlese $\mathcal{B}$-matrisen direkte:

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**e)** Finn standard matrisen til den lineære transformasjonen $T$ i **d)**.

**Løsning:** La $P = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4]$; da er standard matrisen gitt ved $P[T]_\mathcal{B}P^{-1}$. Vi har funnet $P^{-1}$ i **b)** og utregner

$$P[T]_\mathcal{B}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**f)** Avgjør om det finnes en lineær transformasjon $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ slik at

$$S(\mathbf{v}_1) = \mathbf{b}_1, \quad S(\mathbf{v}_2) = \mathbf{b}_2, \quad S(\mathbf{v}_3) = \mathbf{b}_3, \quad S(\mathbf{v}_4) = \mathbf{b}_4.$$

Svaret skal begrunnes.

**Løsning:** Da $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ følger det at hvis en slik lineær transformasjon finnes er

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = S(\mathbf{v}_1) + S(\mathbf{v}_2) = S(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = S(\mathbf{v}_4) = \mathbf{b}_4.$$

Men dette kan ikke være rigtig da vi har sjekket i **a)** at $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, og $\mathbf{b}_4$ er lineært uavhengige. Derfor finnes det ikke en slik lineær transformasjon.

## Oppgave 3

**a)** Kjeglesnittet $K$ har ligningen

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 = 14.$$

Finn en ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at $K$'s ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv ligningen for $K$ i det nye koordinatsystemet.

**Løsning:** La $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Vi må finne en ortonormal basis av egenvektorer for $A$. Vi finner røttene i det karakteriske polynom $\lambda^2 - 9\lambda + 14$ og ser at $A$ har egenverdiene $\lambda = 7$ og $\lambda = 2$.

For $\lambda = 7$:
$A - 7I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, og vi finner egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

For $\lambda = 2$:
$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, og vi finner egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Da $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er enhetsvektorer og $A$ er symmetrisk er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en ortonormal basis av egenvektorer og i denne basisen har $K$ ligningen $7y_1^2 + 2y_2^2 = 14$.

**b)** Avgjør hva slags kjeglesnitt $K$ er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og $K$.

**Løsning:** Da egenverdiene har samme fortegn er $K$ en ellipse. For å tegne $K$ skriver vi ligningen som

$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{7})^2} = 1.$$

Vi ser at $K$ skærer $y_1$-aksen for $y_1 = \sqrt{2}$ og $y_2$-aksen for $y_2 = \sqrt{7}$.

## Oppgave 4

La $M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \end{bmatrix}$ der $a$ og $b$ er reelle tall.

**a)** Vis at det karakteristiske polynomet til $M_{a,b}$ er gitt ved

$$\det(M_{a,b} - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - (a+b)\lambda - 2).$$

**Løsning:** Dette kan beregnes på flere måter. Hvis vi først trekker tredje rekke fra første rekke og dernest adderer første søyle til tredje søyle får vi

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & b \\ 1 & -\lambda & 1 \\ a & 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ a & 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ a & 1 & a+b-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda(-\lambda(a+b-\lambda) - 2) = -\lambda(\lambda^2 - (a+b)\lambda - 2).$$

**b)** Vis at $M_{a,b}$ er diagonaliserbar for alle valg av $a$ og $b$.

**Løsning:** Fra **a)** ser vi at $M_{a,b}$ har egenverdiene

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2+8}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2+8}}{2}.$$

Det er klart at $\lambda_2 > 0$ og at $\lambda_3 < 0$ slik at $M_{a,b}$ har tre ulike egenverdier. Da egenvektorer hørende til ulike egenverdier er lineært uavhengige finnes det en basis av egenvektorer og $M_{a,b}$ er derfor diagonaliserbar.

**c)** For hvilke tall $a$ og $b$ er $M_{a,b}$ ortogonalt diagonaliserbar? Svaret skal begrunnes.

**Løsning:** Matrisen $M_{a,b}$ er ortogonalt diagonaliserbar hvis og kun hvis den er symmetrisk. Dette er tilfeldet nettopp når $a = b$.

**d)** La $a = 0$ og $b = 1$. Finn en invertibel matrise $P$ og en diagonalmatrise $D$ slik at

$$M_{0,1}P = PD.$$

**Løsning:** Matrisen $M_{0,1}$ har egenverdiene 0, 2 og $-1$. Vi må finne en egenvektor for hver egenverdi.

For $\lambda = 0$: $M_{0,1} - 0I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vi ser at egenrommet er span $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, så vi kan feks. velge egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vi ser at egenrommet er span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, så vi kan feks. velge egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For $\lambda = -1$: $A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vi ser at egenrommet er span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, så vi kan feks. velge egenvektoren $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matrisene $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ oppfyller betingelsen.

## Oppgave 5

**a)** Gi definisjonen på at en $n \times n$ matrise $A$ er symmetrisk. Vis at dersom $A$ og $B$ er symmetriske $n \times n$ matriser da er $A + B$ symmetrisk.

**Løsning:** En $n \times n$-matrise $A$ er symmetrisk hvis og kun hvis $A^T = A$. Hvis $A$ og $B$ er symmmetriske matriser er $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ slik at $A + B$ også er symmetrisk.

**b)** Gitt en symmetrisk matrise $A$, la $Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ være den tilhørende kvadratiske formen. Vis at for to symmetriske $n \times n$ matriser $A$ og $B$ gjelder at

$$Q_{A+B}(\mathbf{x}) = Q_A(\mathbf{x}) + Q_B(\mathbf{x}).$$

**Løsning:** Vi utregner

$$Q_{A+B}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(A\mathbf{x} + B\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = Q_A(\mathbf{x}) + Q_B(\mathbf{x}).$$

**c)** Anta at alle egenverdiene for de symmetriske $n \times n$-matrisene $A$ og $B$ er positive. Vis at alle egenverdiene for $A + B$ er positive.

**Løsning:** Vi vet at en symmetrisk matrise $A$ har bare positive egenverdier hvis og kun hvis $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq 0$. Hvis alle egenverdiene til $A$ og $B$ er positive får vi fra **b)** at

$$Q_{A+B}(\mathbf{x}) = Q_A(\mathbf{x}) + Q_B(\mathbf{x}) > 0$$

for alle $\mathbf{x} \neq 0$. Det følger at alle egenverdiene til $A + B$ også er positive.

Hans Brodersen Christian Schlichtkrull