Fasit til eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 23. september 2009, kl. 09-14.

Oppgave 1

Gitt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \textit{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ t \end{bmatrix},$$

der t er et reelt tall.

Som forberedelse utfører vi radreduksjon på den augmenterte matrisen, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-7 \end{bmatrix}$$

a) *Finn den reduserte trappeformen (the reduced echelon form) for A.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) *Finn en basis for nullrommet* $\mathrm{Nul}(A)$. *Finn en basis for kolonnerommet* $\mathrm{Col}(A)$.
Basis for nullrommet: $\{[2\ -3\,0\,1]^T, [1\ -2\,1\,0]^T\}$, basis or kolonnerommet: $\{[1\,2\,3]^T, [2\,3\,4]^T\}$.

c) *For hvilke t er vektoren $\mathbf{b}$ i $\mathrm{Col}(A)$? Finn alle løsningene til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for de t der det finnes løsninger.*

$b \in \mathrm{Col}(A)$ nøyaktig når $t = 7$, og da har $Ax = b$ løsningene

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

for $s, t \in \mathbf{R}$.

Oppgave 2

a) *Gi en kort oversikt over minste kvadraters (least squares) metode.*
Se læreboken.

Gitt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b) *Finn en ortogonal basis for* $\mathrm{Col}(A)$.

Dette gjøres ved Gram-Schmidt metoden. Det kan enten gjøres rett frem, men i dette tilfelle kan vi spare litt jobb om vi bytter litt på rekkefølgen.La x_1, x_2, x_3 være kolonnene i A. La $v_1 = x_3 = [0\,2\,0\,0]^T$, $v_2 = x_1 - \mathrm{proj}_{\mathrm{Span}\{v_1\}} x_1 = x_1 - \frac{x_1 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 =$

$[0\,0\,2\,0]^T$ og $v_3 = x_2 - \text{proj}_{\text{Span}\{v_1,v_2\}} x_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_2 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = [1\,0\,0\,1]^T$. Siden vi bare er bedt om å fremskaffe en orto*gonal* basis så kan vi skalere dette til den hendige ortogonale basisen

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) *Finn den ortogonale projeksjonen* $\text{proj}_{\text{Col}(A)}\mathbf{b}$ *av* $\mathbf{b}$ *ned på* $\text{Col}(A)$.

$$\text{proj}_{\text{Col}(A)}\mathbf{b} = \frac{b \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{b \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 + \frac{b \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 = \frac{-1}{1} w_1 + 0 + \frac{8}{2} w_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) *Finn en minste kvadraters metode løsning til* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Enten kan vi løse $A\hat{x} = \hat{b}$ hvor $\hat{b} = \text{proj}_{\text{Col}(A)}\mathbf{b}$, eller vi kan løse $A^T A \hat{x} = A^T b$. Uansett får vi svaret $\hat{x} = [-4\,4\,3/2]^T$.

Oppgave 3

a) *Kjeglesnittet* K *har ligningen*

$$8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 1.$$

Finn en ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ *som er slik at* K*'s ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv ligningen for* K *i det nye koordinatsystemet.*

Om $x = x_1\, x_2]^T$ er kjeglesnittet $x^T A x = 1$ der A er den symmetriske matrisen

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vi ortogonaldiagonaliserer A og får $P^T A P = D$ hvor

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Kolonnene i P gir den nye ortogonale basisen. Da får vi $1 = x^T A x = x^T P D P^T x$, så om vi setter

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^T x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

får vi $4y_1^2 + 9y_2^2 = y^T D y = 1$.

b) *Avgjør hva slags kjeglesnitt* K *er og tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og* K.

Da begge egenverdiene var positive er K en ellipse. Ut i fra formlene over tegner du nå en figur.

Oppgave 4

La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Hva er egenverdiene til A?*
Det karakteristiske polynomet et $-(\lambda-2)^2(\lambda+4)$, så egenverdiene er 2 og -4.

b) *For hver egenverdi, hva er det tilhørende egenrommet?*
Egenrommet tilhørende egenverdien 2 er

$$\mathrm{Nul}(A-2I) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

og egenrommet tilhørende egenverdien -4 er

$$\mathrm{Nul}(A+4I) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) *Er A diagonaliserbar? Er A ortogonalt diagonaliserbar?*

A er diagonaliserbar siden summen av dimensjonen til egenrommene er lik dimesnonen til matrisen: $2+1=3$. A er ikke symmetrisk, så heller ikke ortogonalt diagonaliserbar.

d) *Finnes der en (reell) matrise B slik at $B^2 = A$?*

Nei. Som i mange oppgaver finnes der flere måter å komme frem til svaret. Her er én:

Anta at det finnes en slik B. Vi skal vise at det leder til en selvmotsigelse. Betrakt det karakteristiske polynomet $\det(B-\lambda I) = a - b\lambda + c\lambda^2 - \lambda^3$ (a, b og c er reelle tall). Derfor har vi

$$\begin{aligned} -(\lambda^2-2)^2(\lambda^2+4) &= \det(A-\lambda^2 I) = \det(B^2-\lambda^2 I) = \det((B-\lambda I)(B+\lambda I)) \\ &= \det(B-\lambda I)\det(B+\lambda I) \\ &= (a-b\lambda+c\lambda^2-\lambda^3)(a+b\lambda+c\lambda^2+\lambda^3). \end{aligned}$$

Dette er umulig, for polynomet på venstre side er -16 når $\lambda = 0$, mens høyresiden blir a^2, som jo ikke er negativ.

[Om vi hadde tillatt komplekse tall kunne a^2 godt være negativ, og da finnes faktisk slike B: om P er en matrise av egenvektorer for A slik at $P^{-1}AP$ er diagonalmatrisen med $2, 2, -4$ på diagonalen, la D være diagonalmatrisen med $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2i$ på diagonalen. Da har matrisen $B = PDP^{-1}$ kvadrat lik A.]

Oppgave 5

La V være et vektorrom og la $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ være en basis for V. Betrakt vektorene $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ *og* $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$.

a) *Er $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ en basis for V? Hva er dimensjonen til* $\mathrm{Span}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$*?*

Vi ser at $y_1 = y_2 + y_3$, så $\{y_1, y_2, y_3\}$ er lineært avhengig, og følgelig ikke en basis. La $W = \text{Span}\{y_1, y_2, y_3\}$. Siden vi ikke hadde en basis er $\dim W < 3$, men siden y_1 og y_2 ikke er multipler av hverandre er $\dim W \geq 2$. Tilsammen har vi altså $\dim W = 2$.

For $\mathbf{v} \in V$ *med* $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = [a_1, a_2, a_3]^T \in \mathbf{R}^3$*, la*

$$T(\mathbf{v}) = a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2 + a_3\mathbf{y}_3.$$

Dette definerer en lineærtransformasjon $T: V \to V$*.*

b) *Hva er matrisen* $[T]_{\mathscr{B}}$ *til* T *i* $\mathscr{B}$*-basisen?*

$$[T]_{\mathscr{B}} = [[T(x_1)]_{\mathscr{B}}, [T(x_2)]_{\mathscr{B}}, [T(x_3)]_{\mathscr{B}}] = [[y_1]_{\mathscr{B}}, [y_2]_{\mathscr{B}}, [y_3]_{\mathscr{B}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La $\ker(T)$ være mengden av alle $\mathbf{v} \in V$ slik at $T(\mathbf{v}) = 0$. Er $\ker(T)$ et underrom av V? Hvis ja, hva er dimensjonen til $\ker(T)$?

Vi må sjekke om lineærkombinasjoner av elementer i $\ker(T)$ er i $\ker(T)$: anta $v, w \in \ker(T)$ og $a, b \in \mathbf{R}$. Da er $T(av + bw) = aT(v) + bT(w) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$ (den første likheten siden T er lineær, den andre siden $T(v) = T(w) = 0$), så lineærkombinasjonen ligger også i $\ker(T)$.

Siden $v \in \ker(T)$ hvis og bare hvis $[T(v)]_{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}} = 0$, er dimensjonen til $\ker(T)$ lik dimensjonen til nullrommet til $[T]_{\mathscr{B}}$. Ved radreduksjon får vi at dimensjonen til nullrommet er 1.

Oppgave 6

La $\mathscr{B}$*,* $\mathscr{C}$ *og* $\mathscr{D}$ *være basiser for et to-dimensjonalt vektorrom* V*. Skriv ned en sammenheng mellom basisskiftematrisene (*change-of-coordinates matrices*)* $\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$*,* $\mathcal{P}_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}$ *og* $\mathcal{P}_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}$*. Husk begrunnelse. Holder ligningen du har skrevet ned også i høyere dimensjoner?*

Basisskiftematrisene har egenskapen at om $v \in V$ så er $[v]_{\mathscr{C}} = \mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}}$. Vi ser derfor at

$$(P_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}})[v]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}(\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}}) = P_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}[v]_{\mathscr{C}} = [v]_{\mathscr{D}} = P_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}}.$$

Siden vektoren $[v]_{\mathscr{B}} \in \mathbf{R}^n$ kan velges fritt må vi derfor ha at matrisene selv er like: $P_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = P_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}$. Dette er selvsagt ikke avhengig av dimensjonen (oppgaven er stilt slik at man også kan gyve løs på konkrete basiser og finne svaret).