Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Tirsdag 2. juni 2009, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ t \end{bmatrix},$$

der t er et reelt tall.

a) Finn den reduserte trappeformen (the reduced echelon form) for A.

b) Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}(A)$.

c) Finn en basis for kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$.

d) For hvilke t har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsninger? Finn alle løsningene til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for de t der det finnes løsninger.

Oppgave 2

Betrakt vektorene

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at mengden $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ er lineært uavhengig.

b) Finn en ortogonal basis for $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$.

c) Finn den ortogonale projeksjonen $\mathrm{proj}_W \mathbf{x}$ av $\mathbf{x}$ ned på W.

Oppgave 3

Finn (ved hjelp av minste kvadraters metode) ligningen $y = \beta_0 + \beta_1 x$ til den minste kvadraters linjen (least squares line) som best passer datapunktene

x	0	1	2	3
y	0	3	4	7

Oppgave 4

La V være et vektorrom og $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ en basis for V.

a) Hvordan er koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ til en vektor $\mathbf{v}$ i V definert?

b) La $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ og $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Hvorfor er $\mathscr{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ en basis for V? Finn en matrise $\mathcal{P}_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}$ slik at for enhver $\mathbf{v} \in V$ så er $[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B}}[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$.

Oppgave 5

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hva er egenverdiene til A? For hver egenverdi, finn en egenvektor.

La $\mathbf{P}_3$ være vektorrommet av tredjegradspolynomer med reelle koeffisienter. La $T\colon \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$ være den lineære transformasjonen som sender polynomet $p(t) \in \mathbf{P}_3$ til polynomet

$$T(p(t)) = (1+t) \cdot p'(t)$$

(f.eks. er $T(1 + 2t + t^3) = (1 + t)(2 + 3t^2) = 2 + 2t + 3t^2 + 3t^3$).

b) Hva er matrisen $[T]_{\mathscr{S}}$ til T i standardbasisen $\mathscr{S} = \{1, t, t^2, t^3\}$?

c) For hvilke reelle tall λ finnes det et polynom $p(t)$ forskjellig fra nullpolynomet slik at

$$T(p(t)) = \lambda\, p(t)?$$

Finn løsningene $p(t)$ for hver av disse λ. Finn en basis $\mathscr{B}$ for $\mathbf{P}_3$ slik at $[T]_{\mathscr{B}}$ er en diagonalmatrise.

Oppgave 6

a) Definér det karakteristiske polynomet til en kvadratisk matrise.

b) La A være en 4×4-matrise, og la $p_A(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ være det karakteristiske polynomet. Betrakt 4×4-matrisen

$$p_A(A) = A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + dI,$$

der I er identitetsmatrisen. Vis at om A er en diagonalmatrise, så er $p_A(A) = 0$. Vis at om A er en diagonalisérbar matrise, så er $p_A(A) = 0$

[Kommentar: dette er et spesialtilfelle av Cayley-Hamiltons teorem som sier at "en kvadratisk matrise tilfredstiller sin karakteristiske ligning".]

Hans Brodersen Bjørn Ian Dundas