Foreløpig fasit, MAT121. (Uten garanti mot trykkfeil)
Tirsdag 2. juni 2009.

Oppgave 1

Gitt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ t \end{bmatrix},$$

der t er et reelt tall.

a) *Finn den reduserte trappeformen (the reduced echelon form) for A.*

Radreduserer:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i denne remsen markerer dere av hvilke radreduksjoner som er foretatt; det er ikke så lett å gjøre elektronisk). Matrisen lengst til høyre er den reduserte trappeformen til A.

b) *Finn en basis for nullrommet* $\mathrm{Nul}(A)$.

Nullrommet endres ikke ved radreduksjoner, så vi kan løse det homogene systemet assosiert med den reduserte trappeformen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(og en ligning med null på begge sider). Vi får x_2 og x_4 som fri variable og en generell løsning er på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så, nullrommet har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Det er en *svært god idé* å sjekke at A ganger hver av de påståtte basisvektorene virkelig er null.

c) *Finn en basis for kolonnerommet* Col(A)*.*

Pivotkolonnene til A gir en basis: i dette tilfellet 1. og 3. kolonne:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

d) *For hvilke t har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsninger? Finn alle løsningene til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for de t der det finnes løsninger.*

Radreduserer den augmenterte matrisen $[A\,\mathbf{b}]$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -4 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -4 & t \\ -3 & 6 & -8 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & t+2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t+6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2t-5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t+6 \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning hvis og bare hvis $t = -3$.

La $t = -3$. Da gir den siste augmenterte matrisen i radreduksjonen over systemet

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 1$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 = -1$$

(og en ligning med null på begge sider). Følgelig er løsningene på formen

$$\mathbf{x} = x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der x_2 og x_4 velges fritt.

Det er en *svært god idé* å sjekke at A ganger den siste vektoren virkelig løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når $t = -3$.

Oppgave 2

Betrakt vektorene

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Vis at mengden $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ er lineært uavhengig.*

Mengden er lin. uavh. hvis og bare hvis matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har tre pivotkolonner, hvilket vi sjekker ved radreduksjon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) *Finn en ortogonal basis for* $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$.
Vi bruker Gram-Schmidts metode: la

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \mathrm{proj}_{\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1\}}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \mathrm{proj}_{\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}}\,\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \right). \end{aligned}$$

Setter vi inn tall får vi den ortogonale basisen

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Det er en *svært god idé* å sjekke at f.eks. $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = 0$.

c) *Finn den ortogonale projeksjonen* $\mathrm{proj}_W \mathbf{x}$ *av* $\mathbf{x}$ *ned på* W.

$$\mathrm{proj}_W \mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 = \frac{-4}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{4}\mathbf{v}_2 + \frac{0}{34}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Det er en *svært god idé* å sjekke at f.eks. $\mathbf{x} - \mathrm{proj}_W \mathbf{x} = [7 \ -3 \ -1 \, 3]^T$ står ortogonalt på $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ og $\mathbf{x}_3$.

Oppgave 3

Finn (ved hjelp av minste kvadraters metode) ligningen $y = \beta_0 + \beta_1 x$ *til den minste kvadraters linjen (least squares line) som best passer datapunktene*

x	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*0*	*3*	*4*	*7*

Bruker metoden fra boken, kapittel 6.6: la

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Hvis data lå på den rette linjen $y = \beta_0 + \beta_1 x$ ville $\beta = [\beta_0\, \beta_1]^T$ være en løsning til $X\beta = \mathbf{y}$. Den minste kvadraters løsning av denne ligningen er løsningen til $X^T X\hat{\beta} = X^T\mathbf{y}$.

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad X^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Radreduserer den augmenterte matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 3 & 7 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 5/2 & 11/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 11/5 \end{bmatrix}$$

noe som gir løsningen

$$y = \frac{1}{5} + \frac{11}{5}x.$$

Oppgave 4

La V være et vektorrom og $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ en basis for V.

a) *Hvordan er koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ til en vektor $\mathbf{v}$ i V definert?*

Slå opp definisjonen i kapittel 4.4: Gitt en vektor $\mathbf{v}$ i V. Siden $\mathscr{B}$ er en basis kan $\mathbf{v}$ skrives entydig som en lineærkombinasjon $\mathbf{v} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + a_3\mathbf{x}_3$ der a_1, a_2 og a_3 er reelle tall. Koordinatvektoren er da $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = [a_1\, a_2\, a_3]^T \in \mathbf{R}^3$.

b) La $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ og $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Hvorfor er $\mathscr{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ en basis for V? Finn en matrise $\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ slik at for enhver $\mathbf{v} \in V$ så er $[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$.

For å vise at $\mathscr{C}$ er en basis må vi vise at mengden er

- lineært uavhengig og
- spenner ut V.

Siden dimensjonen til V er lik antallet elementer i $\mathscr{C}$ er det nok å vise én av delene, men siden dette er et løsningsforslag gjør vi begge deler:

Lineær uavhengighet: betrakt en lineærkombinasjon

$$\begin{aligned} 0 =& c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3 \\ =& c_1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) + c_2(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) + c_3(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ =& (c_1 + c_3)\mathbf{x}_1 + (c_2 + c_3)\mathbf{x}_2 + (c_1 + c_2)\mathbf{x}_3. \end{aligned}$$

Må vise at c_1, c_2 og c_3 nødvendigvis alle er null.

Siden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig må alle koeffisientene være null: $0 = c_1 + c_3 = c_2 + c_3 = c_1 + c_2$, noe som umiddelbart gir at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Spenner ut: Løser vi med hensyn på $\mathbf{x}$'ene får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 =& \quad \frac{1}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_3, \\ \mathbf{x}_2 =& -\frac{1}{2}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_3 \\ \mathbf{x}_3 =& \quad \frac{1}{2}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{y}_3. \end{aligned}$$

En vilkårlig vektor $\mathbf{v} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + a_3\mathbf{x}_3$ kan altså skrives som $a_1(\frac{1}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_3) + a_2(-\frac{1}{2}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_3) + a_3(\frac{1}{2}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{y}_3)$ og $\mathbf{y}$'ene spenner ut V.

Noen vil synes det er greiest å bruke basisen $\mathscr{B}$ til å oversette det hele til $\mathbf{R}^3$, og sjekke at $\{[\mathbf{y}_1]_{\mathscr{B}}, [\mathbf{y}_2]_{\mathscr{B}}, [\mathbf{y}_3]_{\mathscr{B}}\}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$. Dette er helt greit. Man ender da typisk med å sjekke ved radreduksjon at matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(hvis kolonner er koordinatvektorene til $\mathbf{y}$ene) er invertibel.

For å finne $\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ er det greiest med alternativet med aa vise at $\mathscr{C}$ spenner ut, siden det gir oss direkte koordinatvektorene til $\mathbf{x}$ene i $\mathscr{C}$-basisen:

$$\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = [[\mathbf{x}_1]_{\mathscr{C}}, [\mathbf{x}_2]_{\mathscr{C}}, [\mathbf{x}_3]_{\mathscr{C}}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

For å huske formelen for $\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ som vi brukte over, er greit å ha i mente at det er standardmatrisen til lineærtransformasjonen som er stiplet under

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "{[\,]_{\mathscr{C}}}"'] \arrow[dr, "{[\,]_{\mathscr{B}}}"] & \\ \mathbf{R}^3 & & \mathbf{R}^3 \arrow[ll, dotted] \end{tikzcd} .$$

Den j søylen i den tilhørende matrisen får vi ved å anvende transformasjonen på dn $j$te standard basis vektor $\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{x}_j \mapsto [x_j]_{\mathscr{C}}$.

Om vi ikke alt hadde uttrykt $\mathbf{x}$ene vhja. $\mathbf{y}$ene ville jeg nok ha sagt

$$\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = (\mathcal{P}_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1},$$

og brukt radreduksjon på den augmenterte matrisen $[\mathcal{P}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}|I] \sim [I|\,(\mathcal{P}_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}})^{-1}]$ til å komme frem til svaret.

Oppgave 5

a) *La*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hva er egenverdiene til A? For hver egenverdi, finn en egenvektor.

Øvretriangulær matrise: egenverdiene på diagonalen: 0, 1, 2 og 3.

Egenrommet til egenverdien 0:

$$\mathrm{Nul}(A - 0\cdot I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(den nest siste likheten kommer av at radekvivalente matriser har samme nullrom, den siste likheten er resultatet av å løse det homogene ligningssystemet. I en føring kan det godt være mer mellomregninger)

Egenrommet til egenverdien 1:

$$\mathrm{Nul}(A - 1\cdot I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Egenrommet til egenverdien 2:

$$\mathrm{Nul}(A - 2\cdot I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Egenrommet til egenverdien 3:

$$\mathrm{Nul}(A - 3\cdot I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

En egenvektor med egenverdi 0: $[1\,0\,0\,0]^T$.
En egenvektor med egenverdi 1: $[1\,1\,0\,0]^T$.
En egenvektor med egenverdi 2: $[1\,2\,1\,0]^T$.
En egenvektor med egenverdi 3: $[1\,3\,3\,1]^T$.

La $\mathbf{P}_3$ være vektorrommet av tredjegradspolynomer med reelle koeffisienter. La $T\colon \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$ være den lineære transformasjonen som sender polynomet $p(t) \in \mathbf{P}_3$ til polynomet

$$T(p(t)) = (1+t)\cdot p'(t)$$

(f.eks. er $T(1+2t+t^3) = (1+t)(2+3t^2) = 2+2t+3t^2+3t^3$).

b) *Hva er matrisen $[T]_{\mathscr{S}}$ til T i standardbasisen $\mathscr{S} = \{1, t, t^2, t^3\}$?*

For å huske hva formelen for matrisen i en basis er, kan man bruke tegningen

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}_3 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[]_{\mathscr{S}}}"] & \mathbf{P}_3 \arrow[d, "{[]_{\mathscr{S}}}"] \\ \mathbf{R}^4 \arrow[r, dotted] & \mathbf{R}^4 \end{tikzcd},$$

$[T]_{\mathscr{S}}$ er standardmatrisen til den stiplede transformasjonen: den $j$te kolonne er resultatet av å anvende denne transformasjonen på den j standardvektor $\mathbf{e}_j$. Uansett hvordan du husker formelen får du

$$\begin{aligned} [T]_{\mathscr{S}} &= [[T(1)]_{\mathscr{S}}\,[T(t)]_{\mathscr{S}}\,[T(t^2)]_{\mathscr{S}}\,[T(t^3)]_{\mathscr{S}}] \\ &= [[0]_{\mathscr{S}}\,[1+t]_{\mathscr{S}}\,[(1+t)2t]_{\mathscr{S}}\,[(1+t)3t^2]_{\mathscr{S}}] = A \end{aligned}$$

(der A er matrisen i punkt **a)**).

c) *For hvilke reelle tall λ finnes det et polynom $p(t)$ forskjellig fra nullpolynomet slik at*

$$T(p(t)) = \lambda\, p(t)?$$

Finn løsningene $p(t)$ for hver av disse λ. Finn en basis $\mathscr{B}$ for $\mathbf{P}_3$ slik at $[T]_{\mathscr{B}}$ er en diagonalmatrise.

Likheten $T(p(t)) = \lambda\, p(t)$ holder hvis og bare hvis $[T(p(t))]_{\mathscr{S}} = [\lambda\, p(t)]_{\mathscr{S}}$. Venstresiden er

$$[T(p(t))]_{\mathscr{S}} = [T]_{\mathscr{S}}[p(t)]_{\mathscr{S}} = A[p(t)]_{\mathscr{S}},$$

mens høyresiden er $\lambda[p(t)]_{\mathscr{S}}$, så $[p(t)]_{\mathscr{S}}$ er en egenvektor og λ en egenverdi for A.

Disse fant vi i **a)**. Siden det er fire forskjellige egenverdier danner egenvektorene listet i **a)** en basis for $\mathbf{R}^4$ som diagonaliserer A. De tilhørende polynomene i $\mathbf{P}_3$ gir basisen $\mathscr{B} = \{1,\ 1{+}t,\ 1{+}2t{+}t^2,\ 1{+}3t{+}3t^2{+}t^3\}$ med $[T]_{\mathscr{B}}$ lik diagonalmatrisen med diagonalelementene 0, 1, 2, og 3.

Det er en *svært god idé* å sjekke f.eks. at $T((1+t)^n) = n(1+t)^n$.

Oppgave 6

a) *Definér det karakteristiske polynomet til en kvadratisk matrise.*

Sjekk definisjonen i boken.

b) *La A være en 4×4-matrise, og la $p_A(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ være det karakteristiske polynomet. Betrakt 4×4-matrisen*

$$p_A(A) = A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + dI,$$

der I er identitetsmatrisen. Vis at om A er en diagonalmatrise, så er $p_A(A) = 0$. Vis at om A er en diagonalisérbar matrise, så er $p_A(A) = 0$

Om $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ er en diagonalmatrise er $A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^n \end{bmatrix}$. Så

$$p_A(A) = \begin{bmatrix} p_A(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_A(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_A(\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_A(\lambda_4) \end{bmatrix},$$

men λene er egenverdiene til A, så de er alle nullpunkter til det karakteristiske polynomet, og $p_A(A) = 0$.

Om $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ hvor D er diagonal og P invertibel er de karakteristiske polynomene til A og D like:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(P \cdot D \cdot P^{-1} - \lambda I) \\ &= \det(P \cdot (D - \lambda I) \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(D - \lambda I) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \det(D - \lambda I) = p_D(\lambda). \end{aligned}$$

Ved første del av oppgaven er altså $p_A(D) = p_D(D) = 0$. Siden $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ er

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + dI = P \cdot (D^4 + aD^3 + bD^2 + cD + dI) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot p_A(D) \cdot P^{-1} = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0. \end{aligned}$$