Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 29. september 2010, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Betrakt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Hva er dimensjonen til $\mathrm{Nul}(A)$? Hva er rangen til A?

b) Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.

c) Beregn den ortogonale projeksjonen $\widehat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)}\mathbf{b}$ av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$. Sjekk at $\widehat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$ er i det ortogonale komplementet til $\mathrm{Col}(A)$.

d) Finn en løsning $\mathbf{y}$ til den homogene ligningen $A^T\mathbf{y} = 0$.

e) Finn en minste kvadraters (least squares) løsning til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Er der flere minste kvadraters løsninger til denne ligningen?

Oppgave 2

Betrakt kjeglesnittet K med ligningen

$$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2 = 12.$$

a) Finn en ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at Ks ligning i det nye koordinatsystemet er uten kryssledd. Skriv ligningen for K i det nye koordinatsystemet.

b) Hvilken type kjeglesnitt er K? Tegn en skisse som viser det originale og det nye koordinatsystemet og K.

Oppgave 3

a) Hva betyr det at en matrise er diagonaliserbar? Hva betyr det at en matrise er ortogonalt diagonaliserbar?

b) Finn egenverdiene for matrisen

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er E diagonaliserbar?

c) Finn alle egenvektorene for E.

d) La $\mathbf{v}_1 = [1\ 1\ 0]^T$ og $\mathbf{v}_2 = [1\ 0\ 1]^T$ være egenvektorer for en symmetrisk matrise A. Hvis egenverdien til $\mathbf{v}_1$ er 2, hva er egenverdien til $\mathbf{v}_2$? Finn en ortogonal matrise som diagonaliserer A.

Oppgave 4

La $(\mathbf{R}^n)^*$ være vektorrommet av alle lineærtransformasjoner $L\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, med vektorromsstrukturen

1. $(L_1 + L_2)(\mathbf{v}) = L_1(\mathbf{v}) + L_2(\mathbf{v})$, for $L_1, L_2 \in (\mathbf{R}^n)^*$ og $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
2. $(cL)(\mathbf{v}) = c \cdot L(\mathbf{v})$, for $c \in \mathbf{R}$, $L \in (\mathbf{R}^n)^*$ og $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.

Definer $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^* \in (\mathbf{R}^n)^*$ ved å la $\mathbf{e}_j^*(\mathbf{v}) = v_j$ for $\mathbf{v} = [v_1\ \ldots\ v_n]^T \in \mathbf{R}^n$ og $j = 1, \ldots, n$.

a) Forklar hvorfor standard matrisen for $\mathbf{e}_1^*\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ er $[1\ 0\ 0 \ldots 0]$.

b) Hvorfor er $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*\}$ en basis for $(\mathbf{R}^n)^*$?

La $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineærtransformasjon. Gitt $L \in (\mathbf{R}^n)^*$, la $S^*(L) \in (\mathbf{R}^n)^*$ være definert ved $S^*(L)(\mathbf{v}) = L(S(\mathbf{v})) \in \mathbf{R}$ for $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.

c) Sjekk at $S^*\colon (\mathbf{R}^n)^* \to (\mathbf{R}^n)^*$ er en lineærtransformasjon. Vis at matrisen til S^* med hensyn til basisen $\mathcal{E}^*$ er den transponerte til standardmatrisen til lineærtransformasjonen $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.