Bokmål

# UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Mandag 31. mai 2010, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
*Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

## Oppgave 1

En bisverm flyr mellom to kuber, $A$ og $B$, på dagtid, og hver bi blir i en av kubene om natten. La $\mathbf{v}_n = [a_n\, b_n]^T \in \mathbf{R}^2$, hvor $a_n$ er antall bier i kube $A$ og $b_n$ er antall bier i kube $B$ i natt $n$.

La $s_{11}$ være sannsynligheten for at en bi som overnatter i kube $A$ en natt vil overnatte der neste natt, og la $s_{22}$ være den samme sannsynligheten mhp. kube $B$, slik at $\mathbf{v}_{n+1} = S\mathbf{v}_n$, hvor

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & 1 - s_{22} \\ 1 - s_{11} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Du kan anta at både $s_{11}$ og $s_{22}$ er i det lukkede intervallet $[0, 1]$.

**a)** Vis at $[-1\, 1]^T$ er en egenvektor for $S$. Hva er den tilhørende egenverdien?

**b)** For hvilke verdier av $s_{11}$ og $s_{22}$ er $S$ diagonaliserbar? For hvilke verdier av $s_{11}$ og $s_{22}$ er $S$ ortogonalt diagonaliserbar?

**c)** Vil biefordelingen nærme seg en likevektstilstand?

**d)** For noen sannsynligheter er $S$ ikke invertibel. Hvordan vil det påvirke biefordelingen ettersom tiden går?

## Oppgave 2

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**a)** Finn den reduserte trappeformen til $A$.

**b)** Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}(A)$. Hva er dimensjonen?

**c)** Finn den generelle løsningen til ligningen $A\mathbf{x} = [-3\ 10\ 7]^T$.

**d)** Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}(A)$. Hva er rangen til $A$?

**e)** Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.

**f)** Finn alle egenverdier og egenvektorer for $A$.

**g)** Hva vil det si at en matrise er diagonaliserbar? Er $A$ diagonaliserbar?

## Oppgave 3

La $s = \sqrt{3}/2$ og betrakt

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & s & 1 \\ s & s & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ s & -s & 0 \\ \frac{1}{2} & -s & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**a)** Finn en minste kvadraters (least squares) metode løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Er der mer enn en løsning?

Betrakt undermengden $\mathcal{B} = \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$ av vektorrommet av reelle funksjoner, og betrakt underrommet $V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$.

I denne oppgaven kan du bruke følgende tabell, hvor $s = \sqrt{3}/2$.

| $x$ | $\pi/6$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $5\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $\frac{1}{2}$ | $s$ | $1$ | $s$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\sin 2x$ | $s$ | $s$ | $0$ | $-s$ | $-s$ |
| $\sin 3x$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

**b)** Hvorfor er $\mathcal{B}$ en basis for $V$?

**c)** Betrakt lineærtransformasjonen $S\colon \mathbf{R}^3 \to V$ gitt ved

$$S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x.$$

Hva er sammenhengen mellom $S$ og koordinatavbildningen (the coordinate mapping) $[\ ]_{\mathcal{B}}\colon V \to \mathbf{R}^3$? Er $S$ en isomorfi?

**d)** La $D\colon V \to V$ være gitt ved dobbeltderivering: $D(f) = f''$. Finn matrisen $[D]_{\mathcal{B}}$ til $D$ relativt til basisen $\mathcal{B}$.

**e)** Betrakt lineær transformasjonen $E\colon V \to \mathbf{R}^5$ gitt ved

$$E(f(x)) = [f(\pi/6)\ f(\pi/3)\ f(\pi/2)\ f(2\pi/3)\ f(5\pi/6)]^T.$$

Forklar hvorfor matrisen $A$ gitt ovenfor er matrisen til $E$ relativt til basisene $\mathcal{B}$ og standard basisen i $\mathbf{R}^5$.

Forklar på hvilken måte en minste kvadraters metode løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{x} = [a\,b\,c]^T$, gir en god løsning på problemet å finne en funksjon $f(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x$ som passer til observasjonene

| $x$ | $\pi/6$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $5\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ |

Hans Brodersen — Bjørn Ian Dundas