# UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

## Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Onsdag 28. september 2011, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
*Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

### Oppgave 1

1. Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ -3 & -2 & -2 & 14 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -13 \\ b \end{bmatrix}.$$

   (a) Finn den reduserte trappeformen til den augmenterte matrise $[A \mid \mathbf{b}]$.

   (b) For hvilke verdier av $b$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ én, ingen eller uendelig mange løsninger? Regn ut den generelle løsningen når den finnes.

   (c) Finn Null$(A)$ og Col$(A)$. Hva er dimensjonen av Null$(A)$ og rangen til $A$?

2. Betrakt matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Regn ut alle egenverdiene og egenvektorene. Er matrisen $B$ diagonaliserbar? Hvis ja, finn diagonaliseringen.

3. Er matrisen $B$ inverterbar? Hvis ja, regn ut inversen.

### Oppgave 2

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ være basisen for vektorrommet $V$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Betrakt $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\mathbf{c}_1 = 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2), \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{c}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3.$$

1. Forklar hvorfor $\mathcal{C}$ er basis.

2. Hva er koordinatene $[\,\cdot\,]_{\mathcal{C}}$ og $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ til vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_3$?

3. Finn de basisskiftende matrisene $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ og $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

4. Utfør Gram–Schmidts metode på vektorene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

## Oppgave 3

Et kjemisk eksperiment går over tre dager og involverer to kjemikalier som reagerer med hverandre og med omgivelsene på en slik måte at massene endres fra dag til dag. Kjemikalienes masse er ukjent men den totale massen kan måles. Man ønsker å estimere deres opprinnelige masse $x_1$ og $x_2$ (i gram). Tilegginformasjon er at for hver dag halveres massen av stoff 1, mens massen av stoff 2 dobles. Dvs at totalmassen er beskrevet av ligningen

$$(\text{totalmasse ved dag } t) = x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + x_2 2^t.$$

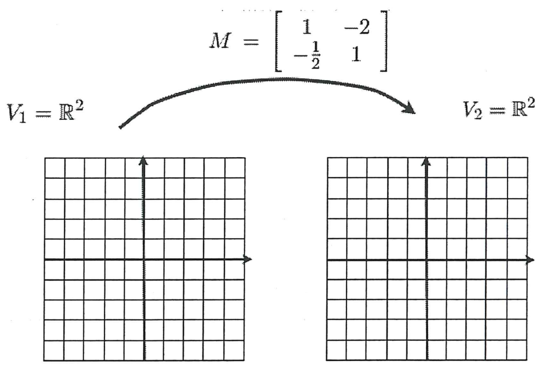
Totalmassen ved dag $t$ er målt som følger:

| $t$[dag] | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| totalmasse [g] | $\frac{5}{8}$ | $\frac{19}{16}$ | 3 | 2 |

Skriv opp som et ligningsystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som gir sammenhengen mellom massene $x_1$ og $x_2$ ved $t = 0$ og totalmassene $\mathbf{b}$ ved tidspunkt $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. En medstudent har regnet ut at minste kvadraters løsning av systemet er gitt som $x_1 = 2/3, x_2 = 1/3$. Verifiser at dette er korrekt.

## Oppgave 4

1. Gi en definisjon av *nullrommet* og *kolonnerommet* av en matrise. Betrakt matrisen $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ som en transformasjon mellom to vektorrom, $V_1 = \mathbb{R}^2$ og $V_2 = \mathbb{R}^2$. Tegn bildene av vektorene $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ under transformasjonen. Regn ut og tegn nullrommet og kolonnerommet til $M$.




Illustrasjon for oppgave 4.1.

2. Betrakt undermengden $\mathcal{B} = \{1, \cos^2 t, \sin^2 t\}$ av vektorrommet av reelle funksjoner og $V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$.

   (a) Er $\mathcal{B}$ en basis for $V$ og hvorfor? Hvis ikke, finn en basis $\mathcal{C}$ for $V$.

   (b) Betrakt $f(t)$ som element av $V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$. La $D : V \to V$ være den lineære trasformasjon $D(f(t)) = f''(t)$ (dobbelderivasjon). Finn $[D]_{\mathcal{C}}$ relativt til basisen $\mathcal{C}$ som under pkt (a).

**Antonella Zanna Munthe-Kaas**