UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag eksamen MAT121 - Lineær algebra H2011

Med forbehold om skrivefeil.

Oppgave 1

1. *Betrakt*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ -3 & -2 & -2 & 14 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -13 \\ b \end{bmatrix}.$$

(a) *Finn den reduserte trappeformen til den augmentert matrise* $[A \mid \mathbf{b}]$.

Regner ut den redusert trappeformen:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -2 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 4 \\ -3 & -2 & -2 & 14 & -13 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & b-3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

(b) *For hvilke verdier av b har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ én, ingen eller uendelig mange løsninger? Regn ut den generelle løsningen når den eksisterer.*

Kolonnene 1,2 og 3 er pivot kolonner, x_4 er en frie variabel. Systemet har løsning hvis og bare hvis det er ingen rekke av type $[0 \cdots 0|k]$ der $k \neq 0$. For at den gitte systemet skal ha løsning, vi må kreve at $b = 0$. Det er ingen tillfell der systemet har kun én løsning på grunn av at det finns frie parametre. Oppsummert: i) $b = 0$: uendelig mange løsninger. ii) $b \neq 0$: ingen løsning.

Finner den generelle løsning nå $b = 0$: ved baklengs substitusjon: $x_3 = 2 + x_4$, $x_2 = -3$, $x_1 = 5 + 4x_4$. Dette gir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Løsningen er en kombinasjon av en spesielle løsning ($[5, -3, 2, 0]^T$) og løsningen til den homogene systemet.

(c) *Finn Null(A) og Col(A). Hva er dimensjonen av Null(A) og rangen til A?*
Fra forrige beregninger, vi har

$$\text{Null}(A) = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

dermed Null(A) har dimensjon 1.

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}\}$$

siden de første 3 kolonner er pivot kolonnene. Dermed rangen til A er 3.

2. *Betrakt matrisen*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Regn ut alle egenverdiene og egenvektorene. Er matrisen B diagonaliserbar? Hvis ja, finn diagonaliseringen.

Vi ser på den karakteristisk polynomet til B.

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3). \end{aligned}$$

For determinanten, det er brukt kofatkor-regel (1. rekke). Ved å finne røttene til $\det(B-\lambda I) = 0$, vi ser at egenverdier er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Egenvektorer: $\lambda = 1$: med litt trening, man ser med en gang at $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$ er en egenvektor. Ellers, løser $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dette gir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(har kun rekkeredusert A siden høyresiden er null, og alle kombinasjoner endrer ikke det!). Kolonne 2 og 3 er pivot kolonner, mens kolonne 1 tilsvarer til en fri parameter. Det gir $x_2 = x_3 = 0$, x_1 frie. Generelle løsning:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1.$$

Det bekrefter det vi påstå over.

$\lambda = -1$: vi løser $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Rekkereduskjon gir

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolonner 1, 2 er pivot kolonner. Kolonne 3 er fri. Dermed $x_2 = -2x_3$, $x_1 = 0$. Generelle løsning:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir egenverdi $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Evt. kan normaliseres, om ønskelig.

$\lambda = -3$: Rekkereduksjon som over, gir $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_3$, dvs egenverdi $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matrisen er diagonaliserbar fordi den har en full sett av egenvektorer. Diagonaliseringen er $B = PDP^{-1}$, der $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ og D er matrisen som har $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ på diagonalen, dvs:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. *Er matrisen B inverterbar? Hvis ja, regn ut inversen.* Ja, siden alle egenverdiene er ulike null, se over. Regner ut ved rekkereduksjon av $[B \mid I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Dette gir

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b_3}\}$ være basisen for vektorrommet V, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Betrakt $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\mathbf{c}_1 = 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2), \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{b_2} + 2\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{c}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3.$$

1. *Forklar hvorfor $\mathcal{C}$ er basis for V.*

   En basis for et vektorrom består av en undermengde av vektorer som i) spenner rommet, ii) er lin. uavhengige. Siden $\mathcal{C}$ består av 3 vektorer ($\dim V = 3$), det er nok å vise at ii) stemmer. Vi ser for skalarer c_1, c_2, c_3 slik at $c_1\mathbf{c}_1 + c_2\mathbf{c_2} + c_3\mathbf{c_3} = \mathbf{0}$. Siden

   $$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

   vi får likningsystemet

   $$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Her kan man gå videre på forskjellige måter. En måte er å vise at matrisen er ikke singulær og dermed systemet har kun den trivielle løsning. En annen måte er f.eks. å rekkeredusere og se at alle kolonne er pivot-kolonner.

   Regner ut determinanten (kofaktor regel, 2. rekke):

   $$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0.$$

   Dermed er matrisen ikke singuær og systemet har kun den trivielle løsning $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ og $\mathcal{C}$ tilfredstiller også ii).

2. *Hva er koordinatene $[\,\cdot\,]_{\mathcal{C}}$ og $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ til vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_3$?*

   Gitt $\mathcal{B}$ en basis for V, vi har $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ der $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$ (alle vektorer i V kan uttrykkes entydig som lineær kombinasjon av basis-vektorene). Dermed, vi ser med en gang at $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. I tillegg, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_3 = 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - 3(-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3) = 5\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 3\mathbf{b}_3$, dermed $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

3. *Finn de basisskifte matrisene $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ og $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.*

   Basisskife matrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ er definert som den matrise slik at

   $$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

   og $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Siden

   $$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$$

   og koordinateskifte er lineært (den er definert av en matrise), vi har

   $$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = v_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + v_2[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} + v_3[\mathbf{b}_3]_{\mathcal{C}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{C}}][\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

som gir

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C}, [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C}, [\mathbf{b}_3]_\mathcal{C}].$$

På samme fremgangsmåte,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = [[\mathbf{c}_1]_\mathcal{B}, [\mathbf{c}_2]_\mathcal{B}, [\mathbf{c}_3]_\mathcal{B}]$$

(see illustrasjonen til høyre).

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "{[\cdot]_\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "{[\cdot]_\mathcal{C}}"] & \\
\mathbb{R}^3 \arrow[rr, shift left, "\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}"] & & \mathbb{R}^3 \arrow[ll, shift left, "\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}"]
\end{tikzcd}$$

Det siste er lettere å finne fordi $\mathbf{c}_i$'ene er allrede gitt i funskjon av $\mathbf{b}_i$'ene:

$$[\mathbf{c}_1]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}_2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}_3]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den andre matrisen finner vi ved å invertere $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$:

$$[\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \mid I] \sim [I \mid \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}].$$

Man får:

$$\left[\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \mid I\ \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

som gir

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. *Utfør Gram–Schmidts metode på vektorene* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

$\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er ortogonale, siden $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$. Vi setter $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1$ og $\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2$. $\mathbf{b}_3$ må ortogonaliseres. Det gjør vi ved å trekke fra det projeksjonene langs retning $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Det er lett å sjekke at $\mathbf{v}_3$ er virkelig ortogonalt til $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Til sist, det gjenstår å normalisere vektorene: dette gir

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{6}\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3

Et kjemisk eksperiment går over tre dager og involverer to kjemikaler som reagerer med hverandre og med omgivelsene på en slik måte at massene endres fra dag til dag. Kjemikalienes masse er ukjent men den totale massen kan måles. Man ønsker å estimere deres opprinnelige masse x_1 og x_2 (i gram). Tilleggsinformasjon er at for hver dag halveres massen av stoff 1, mens massen av stoff 2 dobles. Dvs at totalmassen er beskrevet av ligningen

$$(\textit{totalmasse ved dag } t) = x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + x_2 2^t.$$

Totalmassen ved dag t er målt som følger:

t[dag]	*0*	*1*	*2*	*3*
totalmasse [g]	$\frac{5}{8}$	$\frac{19}{16}$	*3*	*2*

Skriv opp som et ligningsystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som gir sammenhengen mellom massene x_1 og x_2 ved $t = 0$ og totalmassene $\mathbf{b}$ ved tidspunkt $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. En medstudent har regnet ut at minste kvadraters løsning av systemet er gitt som $x_1 = 2/3, x_2 = 1/3$. Verifiser at dette er korrekt.

Vi har en ligning for hver t,

$$\begin{aligned}
x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + x_2 2^0 &= \frac{5}{8} \\
x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + x_2 2^1 &= \frac{19}{16} \\
x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x_2 2^2 &= 3 \\
x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + x_2 2^3 &= 2
\end{aligned}$$

som gir det overdeterminert (fire ligning i to ukjente) systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 2 \\ 1/4 & 4 \\ 1/8 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/8 \\ 19/16 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

For at $x_1 = 2/3, x_2 = 1/3$ skal være en minste kvadraters løsning, residualvektor $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ må være ortogonal til kolonnerommet til A. Det er ekvivalent med å si at $\mathbf{x}$ må være en løsning av de *normale ligning* $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 85/64 & 4 \\ 4 & 85 \end{bmatrix}, \qquad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 71/32 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

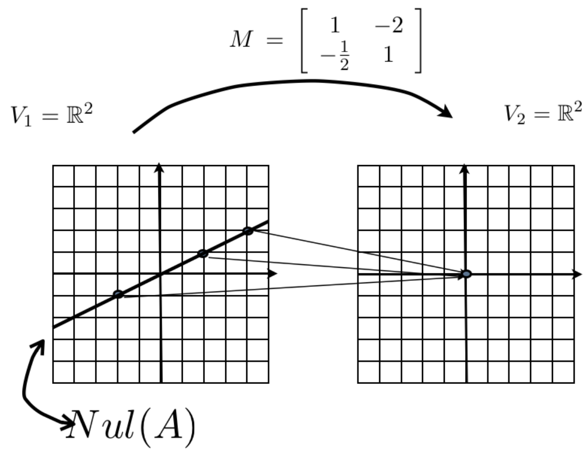
Siden

$$\begin{aligned}
\frac{85}{64} \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{213}{32 \cdot 3} &= \frac{71}{32} \\
4 \cdot \frac{2}{3} + 85 \cdot \frac{1}{3} = \frac{93}{3} &= 31,
\end{aligned}$$

de normale ligning er tilfredstilt dermed den gitt løsning $x_1 = 2/3, x_2 = 1/3$ er korrekt.

Oppgave 4

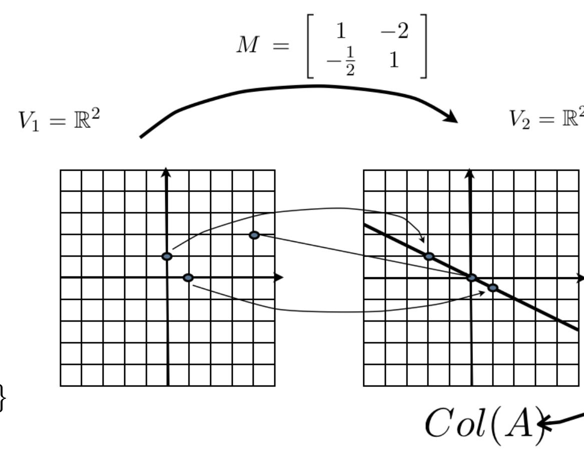
1. *Gi en definisjon av* nullrommet *og* kolonnerommet *av en matrise. Betrakt matrisen* $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ *som en transformasjon mellom to vektorrom,* $V_1 = \mathbb{R}^2$ *og* $V_2 = \mathbb{R}^2$*. Tegn bildene av vektorene* $\mathbf{e_1}$ *og* $\mathbf{e_2}$ *under transformasjonen. Regn ut og tegn nullrommet og kolonnerommet til* M*.*



La A være en $m \times n$ matrise. Den matrise definerer en transformasjon $T : V_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $T : \mathbf{x} \in V_1 \mapsto A\mathbf{x} \in V_2$, der V_1 og V_2 også er vektorrom. *Nullrommet* til A er definert som mengde av alle vektorene i V_1 som blir avbildet til $\mathbf{0}$ (null vektor) i V_2, dvs

$$Nul(A) = \{\mathbf{x} \in V_1 \text{ slik at } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Nul(A) er også et underrom av V_1.



Kolonnrommet til A er definert som mengen av alle vektorer i V_2 som kan skrives som lineær kombinasjon av kolonnene til $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$, dvs

$$Col(A) = \{\mathbf{y} \in V_2 \text{ der } \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \text{for noen } \mathbf{x} \in V_1\}$$

Col(A) er et underrom av V_2.

For den gitte matrise $M = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]$, vi har $M\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}_1$ og $M\mathbf{e}_2 = \mathbf{m}_2$ (se figuren). Kolonnene er proporsjonale og matrisen har rank 1.

$$Col(A) = \{\alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ for } \alpha \text{ i } \mathbb{R}\}.$$

Rangteoremet sier at dim(Nul(A)) = 1, dvs Nul(A) bestå av alle punkene som tilfredstille $x_1 - 2x_2 = 0$,

$$Nul(A) = \{\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ for } \alpha \text{ i } \mathbb{R}\}.$$

Se figuren for en tegning av $Col(A)$ og $Nul(A)$.

2. *Betrakt undermengden* $\mathcal{B} = \{1, \cos^2 t, \sin^2 t\}$ *av vektorrommet av reelle funksjoner og underrommet* $V = \operatorname{Span}\mathcal{B}$*.*

   (a) *Er* $\mathcal{B}$ *en basis for* V *og hvorfor? Hvis ikke, finn en basis* $\mathcal{C}$ *for* V*.*

Det er opplagt at $\mathcal{B}$ ikke er en basis for V fordi elementene er ikke lin. uavhengige: vi ser lett at $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, dvs. den tredje funskjon kan skrives som en lin. komb. av de første to. Derimot, de første to basiselementene er lin. uavh.:
Vi studere $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos^2 t = 0$ (som funskjon av t). Siden uttrykket må gjelde for alle t, det er nok å sjekke for noen verdier, f.eks. $t = 0, t = \pi/2$. Dette gir:

$$\begin{aligned} t = 0: &\qquad 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 0 \\ t = \pi/2: &\qquad 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 0. \end{aligned}$$

Ligning 2 gir $c_1 = 0$ og substitusjon i lign. 1 gir $c_2 = 0$. Dette er det eneste løsning, siden matrisen er ikke singulær (hvorfor?). Dermed funksjonene *er* lin. uavhengige og en basis for V (siden de også spenner V). $\mathcal{C} = \{1, \cos^2 t\}$.[1]

(b) *Betrakt $f(t)$ som element av $V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$. La $D : V \to V$ være den lineær trasformasjonen $D(f(t)) = f''(t)$ (dobbelderivivasjon). Finn $[D]_{\mathcal{C}}$ relativt til basisen $\mathcal{C}$ som under pkt (a).*

Vi tar en vilkårlig $f \in V$, dvs $f(t) = a + b\cos^2 t$. Vi ser at $D(f) = f''(t) = -2b(-\sin^2 t + \cos^2 t) = 2b - 4b\cos^2 t$. Matrisen $[D]_{\mathcal{B}}$ er definert som den matrisen slik at

$$[D(f)]_{\mathcal{B}} = [D]_{\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}}.$$

For $f(t) = a + b\cos^2 t$, vi har $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $[D(f)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2b \\ -4b \end{bmatrix}$. La $[D]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Vi har

$$[D]_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = [D(f)]_{\mathcal{B}} \qquad \longrightarrow \qquad a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 2b \\ -4b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

så det er lett å se at $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og at $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Det gir

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Se diagrammet nedenfor.

$$\begin{tikzcd}
f(t) = a + b\cos^2 t \quad V \arrow[r, "D"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{C}}}"] & V \quad D(f)_{\mathcal{C}} = 2b - 4b\cos^2 t \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{C}}}"] \\
{[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} \quad \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\text{mult. med } {[D]_{\mathcal{C}}}"] & \mathbb{R}^2 \quad {[D(f)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2b \\ -4b \end{bmatrix}}
\end{tikzcd}$$

Man kommer til det samme resultatet om man bruker $[D]_{\mathcal{B}} = [[D(1)]_{\mathcal{B}}, [D(\cos^2 t)]_{\mathcal{B}}]$, siden $D(1) = 1'' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \cos^2 t$, $D(\cos^2 t) = 2 - 4\cos^2 t = 0 = 2 \cdot 1 - 4 \cdot \cos^2 t$.

Antonella Zanna Munthe-Kaas

[1] Det går an også å velge $\mathcal{C} = \{1, \sin^2 t\}$.