Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121- Lineær algebra

Onsdag 26. september 2012, kl. 09:00-14:00.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsene.

Oppgave I

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$$

hvor a er en konstant.

a) Finn en trappeform til A. Identifiser pivot-posisjonene og -kolonnene når a varierer.
b) Finn determinanten til *A*. For hvilke verdier av a er matrisen inverterbar?
c) Finn basiser for *Null(A)*, *Row(A)* og *Col(A)* for forskjellige verdier av a. Hva er dimensjonene til disse og hva er rangen til *A*?
d) La $a \neq 1$ og $a \neq 2$. Bruk Cramers regel til å bestemme a slik at $x_1 = 0$ er en løsning av problemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e) La *a=0*. Finn den adjungerte matrisen til *A*, *adj(A)*, og bruk denne til å finne A^{-1}.

Oppgave 2

Gitt settet av vektorer $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ der:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Hva er definisjonen for at et sett av vektorer $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige, og for at settet skal være en basis for $\mathbb{R}^n$? Er *B* en basis for $\mathbb{R}^3$?
b) Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale. Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{v}_3$ inn på $W = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Bruk denne projeksjonen til å finne en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, $C = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, slik at $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$.
c) Finn transformansjonsmatrisene $P_{B \leftarrow C}$ og $P_{C \leftarrow B}$. Gitt vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, finn koordinatene for $\mathbf{x}$ i basisene *B* og *C*.

Oppgave 3

Vi har gitt følgende sett av målinger

t	0	1	2	3
y	1	4	3	2

og følgende to funksjoner

$$f(t) = a + bt,\ g(t) = c + dt + e\sin(\frac{\pi t}{2})$$

der *a, b, c, d* og *e* er skalarer.

a) Angi koordinatene til *f(t)* og *g(t)* relativt til standard basisen $S = \left\{1, t, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right\}$.

b) Vis at minste kvadraters løsninger, som tilpasser *f(t)* og *g(t)* til verdiene i tabellen, er gitt ved $a = \frac{11}{5}, b = \frac{1}{5}, c = 1, d = 1$ og $e = 2$.

c) Finn residualvektorene for tilnærmingene under *b)*, og normen til disse. Kommenter.

Oppgave 4

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en transformasjon gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \end{bmatrix}$$

a) Begrunn at transformasjonen over er lineær og vis at standardmatrisen for *T* er

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

b) Hva betyr det at en matrise er diagonaliserbar, og ortogonal diagonaliserbar? Begrunn at *M* er ortogonal diagonaliserbar.

c) Finn *P, D* og P^T slik at $M = PDP^T$, der *D* er en diagonalmatrise og $P^T = P^{-1}$.

d) Bruk diagonaliseringen i c) til å finne et uttrykk for M^n. Finn grensen $\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{M}^n\right)$.

Guttorm Alendal