UNIVERSITET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121- Lineær algebra
Onsdag 30. mai 2012, kl. 09:00-14:00.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsene.

Oppgave I

Gitt matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & c \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ d \end{bmatrix}$$

.

a) Finn en trappeform til A. Identifiser pivot-posisjonene og -kolonnene når c varierer.
b) For hvilke verdier av c og d har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *en*, *ingen* og *uendelig* mange løsninger?
c) La c=6 og d=4. Finn den generelle løsningen, og basiser for *Null(* A *), Row(* A) og *Col(* A *).* Hva er dimensjonene til disse og hva er rangen til A?

Oppgave 2

Gitt settet av vektorer $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ der:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) Hva er definisjonen for at et sett av vektorer $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige, og for at settet skal være en basis for $\mathbb{R}^n$? Vis at B er en basis for $\mathbb{R}^3$.
b) Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale. Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{v}_3$ inn på $W = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Bruk denne projeksjonen til å finne en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, $C = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, slik at $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$.
c) Finn transformansjonsmatrisene $P_{B \leftarrow C}$ og $P_{C \leftarrow B}$. Gitt vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, finn koordinatene for $\mathbf{x}$ i basisene B og C.

Oppgave 3

Gitt ligningene

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

a) Utrykk ligningssystemet som en matriseligning $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Finn determinanten til B, er B invertibel?

b) Finn en løsning for x_1 ved å bruke Cramers regel.

c) Finn den adjungerte matrisen til B og bruk denne til å finne B^{-1}.

Oppgave 4

Vi har gitt følgende sett av målinger

t	0	1	2	3
y	3	4	6	11

og følgende to funksjoner

$$f(t) = a + bt, \; g(t) = c + dt + et^2$$

der *a, b, c, d* og *e* er skalarer.

a) Angi koordinatene til *f(t)* og *g(t)* relativt til standard basisen for P_2, $S = \{1, t, t^2\}$.

b) Vis at minste kvadraters løsninger, som tilpasser *f(t)* og *g(t)* til verdiene i tabellen, er gitt ved $a = \frac{21}{10}, b = \frac{13}{5}, c = \frac{31}{10}, d = -\frac{2}{5}$ og $e = 1$.

c) Finn residualvektorene for tilnærmingene under *b),* og normen til disse. Kommenter.

Oppgave 5

La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en transformasjon gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

a) Begrunn at transformasjonen over er lineær og vis at standardmatrisen for *T* er

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) Hva betyr det at en matrise er diagonaliserbar, og ortogonal diagonaliserbar? Begrunn at *M* er ortogonal diagonaliserbar.

c) Finn *P, D* og P^T slik at $M = PDP^T$, der *D* er en diagonalmatrise og $P^T = P^{-1}$.

d) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ slik at transformasjonsmatrisen er diagonal.

e) Bruk diagonaliseringen i c) til å finne M^{-1} (Hint: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$). Finn grensen $\lim_{n\to\infty}\left(M^{-1}\right)^n$.

Guttorm Alendal   Hans Brodersen