Løsningsforslag for Eksamen i MAT121 V12

Med forbehold om trykkfeil.

Oppgave 1

Gitt matrisen A og $\mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ d \end{bmatrix}$$

a)

Finn en trappeform til A

Siden vi senere må løse systemet finner vi en trappeform den utvidede matrisen og finner en trappeform for denne. Trappeformen til A vil da være de fire første kolonnene i denne.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & c & d \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & c-12 & d-4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -r_3/4 \\ -r_2/7 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & c-12 & d-4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 + 7r_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & c+2 & d-4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 - 8r_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-6 & d-4 \end{bmatrix}$$

Identifiser pivot-posisjonene og -kolonnene når c varierer.

Når $c \neq 6$ er alle kolonnene pivot-kolonner, med pivot-posisjoner langs diagonalen.

Når $c = 6$ er kolonnene 1-3 pivot-kolonner, med pivot-posisjonene på diagonalen i de respektive kolonnene.

b)

For hvilke verdier av c og d har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en, ingen og uendelig mange løsninger?

Systemet har

En løsning når $c \neq 6$. Alle kolonner i A er pivot kolonner og dermed inverterbar.

Ingen løsning når $c = 6$ og $d \neq 4$. Får da rekke på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Uendelig mange løsninger når $c = 6$ og $d = 4$. x_4 er da fri variabel.

c)

La $c = 6$ og $d = 4$. Finn den generelle løsningen, og finn basiser for $null(A)$, $row(A)$, og $col(A)$. Hva er dimensjonene til disse og rangen til A?

Finner redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 - 2r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 - 2r_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Som gir

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -x_4 \end{aligned}$$

og den generelle løsningen er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 - x_4 \\ 0 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

En partikulær løsning, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, og løsning av det homogene problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rekkerommet bruker trappeformen, de tre første rekkene spenner ut $row(A)$

$$row(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Kolonnerommet pivot kolonnene er 1,2,3 og de tre tilsvarende kolonnevektorene i A gir

$$col(\tilde{A}) = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Nullrommet er spent ut av løsning av det homogene problemet i Lign. (1)

$$null(\tilde{A}) = span\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ranken er lik 3, som også er dimensjonene til $row(A)$ og $col(A)$. Dimesjonen til $null(A)$ er lik en.

Oppgave 2

Gitt settet av vektorer $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ *der:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

a)

Hva er definisjonen for at et sett av vektorer $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *er lineært uavhengige, og for at settet skal være en basis for* $\mathbb{R}^n$*? Vis at* B *er en basis for* $\mathbb{R}^n$*.*

Et sett av vektorer er lineært uavhengige hvis

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v_2} + \ldots c_m\mathbf{v}_m = 0 \tag{2}$$

har kun den trivielle løsningen. Dvs. ingen av vektorene kan skrives som en linær kombinasjon av de andre.

Et sett er en basis hvis

1. De spenner ut rommet

2. De er lineært uavhengige.

For at settet $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_m\}$ skal spenne ut $\mathbb{R}^n$ må $m > n$. Settet må også bestå lineært uavhengige vektorer, hvis $m > n$ vil minst en av vektorene kunne skrives som en lineær kombinasjon av de resterende. Slik at skal settet være en basis for $\mathbb{R}^n$ må $m = n$ og vektorene i settet må være lineært uavhengige.

Settet B er en basis for $\mathbb{R}^3$; Det er tre vektorer i B, like mange som dimensjonene til $\mathbb{R}^3$. Hvis disse tre vektorene er lineært uavhengige vil de spenne ut $\mathbb{R}^3$.

Viser dette ved å bruke, 2 som gir følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mange muligheter å vise at den trivielle løsningen er den eneste:

Determinanten til matrisen er lik 3, ulik null, dermed invertibel, og kun triviell løsning. Kan også vise at alle kolonnene er pivot kolonner:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

b)

Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale

To vektorer er ortogonale hvis indreproduktet mellom dem er null:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Dvs. $\mathbf{v}_1$ er ortogonal på $\mathbf{v}_2$.

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{v}_3$ inn på $W = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{v}_3$ inn på $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er gitt ved

$$proj_w \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Bruk denne projeksjonen til å finne en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, $C = span\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, slik at $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$.

Siden $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ allerede er ortogonale trenger vi å finne en tredje vektor som er ortogonale på disse to. Dette vil være vektoren

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - proj_w \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Slik at $C = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ der

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

danner er ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.

c)

Finn transformansjonsmatrisene$\tilde{P}_{B\leftarrow C}$ *og* $\tilde{P}_{C\leftarrow B}$.

Transformasjonsmatrisen fra B til C er gitt ved

$$\tilde{P}_{\mathrm{C}\leftarrow\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_1]_C & [\mathbf{v}_2]_C & [\mathbf{v}_3]_C \end{bmatrix}$$

dvs koordinatene til basisvektorene i B relativt til basisen C. Siden $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ og $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$ blir

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1]_C &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{v}_2]_C &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og fra Lign. 3 og Lign. 4 får vi at

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} + proj_w \mathbf{v_3} = \mathbf{u}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_1$$

dvs.

$$[\mathbf{v}_3]_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\tilde{P}_{\mathrm{C}\leftarrow\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den andre transformasjons matrisen $\tilde{P}_{B\leftarrow C}$ er inversen til $\tilde{P}_{C\leftarrow B}$. Finner inversen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dvs.

$$P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Gitt vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, *finn koordinatene til* $\mathbf{x}$ *i basisene* B *og* C.

Koordinatene til $\mathbf{x}$ blir

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{x}]_C = \tilde{P}_{\mathrm{C}\leftarrow\mathrm{B}} [\mathbf{x}]_B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 3

Gitt ligningene

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 8 \end{array}$$

a)

Uttrykk ligningsystemet som en matriseligning $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$.
Matriseligning

$$\tilde{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = \mathbf{c}$$

Finn determinanten til B, er B invertibel?
Determinantent til B

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}2 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 24+20 = 44 \neq 0$$

og B er dermed invertibel.

b)

Finn en løsning for x_1 ved å bruke Cramers regel.
Cramers regel

$$x_i = \frac{det(B_i(\mathbf{c}))}{det(B)}$$

der $B_i(\mathbf{c})$ er matrisen hvor kolonne i er byttet ut med $\mathbf{c}$.

$$det(B_1(\mathbf{c})) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}6 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}2 \begin{vmatrix} 30 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 6*24-2*92 = -40$$

og dermed

$$x_1 = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}$$

c)

Finn den adjungerte matrisen til B og bruk denne til å finne B^{-1}.
Den adjungerte matrisen bygges opp av kofaktorene

$$C_{ji} = det(B_i(\mathbf{e}_j)),$$

der $\mathbf{e}_j$ er enhetsvektor i retning j for standard basisen, slik at

$$adj(B) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

og

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} adj(B)$$

Regner ut kofaktorene

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 24 \quad C_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$
$$C_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad C_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12$$
$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Og dermed er

$$B^{-1} = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & -\frac{3}{11} \\ \frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

Vi har gitt følgende målinger

t	0	1	2	3
y	3	4	6	11

og følgende to funksjoner

$$f(t) = a + bt, \quad g(t) = c + dt + et^2$$

der a, b, c, d og e er skalarer.

a)

Angi koordinatene til $f(t)$ og $g(t)$ relativt til standard basisen for P_2, $S = \{1, t, t^2\}$.

Koordinatene blir

$$[f(t)]_{P_2} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$[g(t)]_{P_2} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

b)

Vis at minste kvadraters løsninger, som tilpasser $f(t)$ og $g(t)$til verdiene i tabellen, er gitt ved $a = \frac{21}{10}$, $b = \frac{13}{5}$, $c = \frac{31}{10}$, $d = -\frac{2}{5}$ og $e = 1$.

Bruker normalligningen:

$$X^T X\beta = X^T \mathbf{y}$$

For $f(t)$:

$$\begin{aligned} X_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ X_f^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_f^T X_f &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \\ X_f^T \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 49 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Har oppgitt at

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{21}{10} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

$$X_f^T X_f \beta = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{21}{10} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 49 \end{bmatrix} = X_f^T \mathbf{y}$$

For g(t)

$$\begin{aligned} X_g &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \\ X_g^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_g^T X_g &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix} \\ X_g^T \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 49 \\ 127 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Har oppgitt at

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{31}{10} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

og dermed

$$X_g^T X_g \beta = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{31}{10} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 49 \\ 127 \end{bmatrix} = X_g^T \mathbf{y}$$

c)

Finn residualvektoren for tilnærmingene under b), og normen til disse. Kommenter.

Residualvektoren er

$$\epsilon = \mathbf{y} - \tilde{X}\beta$$

For f(t):

$$\epsilon_f = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{21}{10} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 21 \\ 47 \\ 73 \\ 99 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ -13 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Totale feilen er

$$\|\epsilon_f\|^2 = \epsilon_f \cdot \epsilon_{\mathbf{f}} = (\frac{9}{10})^2 + (-\frac{7}{10})^2 + (-\frac{13}{10})^2 + (\frac{11}{10})^2 = \frac{21}{5}$$

og $||\epsilon_f|| = \sqrt{\frac{21}{5}}$.

For g(t)

$$\epsilon_g = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{31}{10} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 31 \\ 37 \\ 63 \\ 109 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\epsilon_g\|^2 = \epsilon_g \cdot \epsilon_{\mathbf{g}} = (-\frac{1}{10})^2 + (\frac{3}{10})^2 + (-\frac{3}{10})^2 + (\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{5}$$

og $||\epsilon_g|| = \sqrt{\frac{1}{5}}$.

Vi ser at residualvektoren ved å bruke en kvadratisk funksjon under minste kvadraters tilnærmingen er mye mindre. Det er derfor nærliggende å anta at dataene ikke er lineære og vi vil få en mer nøyaktig model for dataene ved å bruke en kvadratisk funksjon.

Oppgave 5

La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en transformasjon gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

b)

Begrunn at transformasjonen over er lineær og vis at standard matrisen for T er

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi ser at

$$M\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

Dvs at $M\mathbf{x}$ transformerer $\mathbf{x}$ på samme måte som T.

Begrunn at M er ortogonal diagonaliserbar.

M er symmetrisk og dermed ortogonal diagonaliserbar.

c)

Finn P, D, og P^T slik at $M = PDP^T$, der D er en diagonal matrise og $P^T = P^{-1}$.

Egenverdiene til M

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(5-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 4\right] = (5-\lambda)^2(3-\lambda)$$

Egenverdier: $\lambda = 5$, med multiplisitet 2, og $\lambda = 1$.

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 1}$

Må løse

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ser umiddelbart at $v_3 = 0$ og at $v_1 = v_2$. Første egenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 5}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ser at v_3 er fri og at $v_1 = -v_2$ generell løsning

$$v_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som gir egenvektorene

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Disse er ortogonale.

P består nå av egenvektorer som kolonnevektorer og D med tilhørende egenverdier langs diagonalen. Med kravet om at $P^{-1} = P^T$ må vi bruke normerte egenvektorer, dvs med lengde 1. Da blir

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\ P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ slik at transformasjonensmatrisen er diagonal.

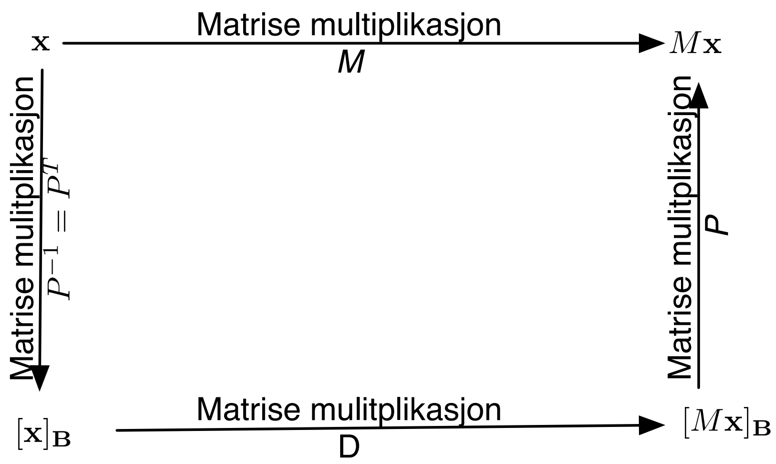
Vi har at

$$M\mathbf{x} = PDP^T\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x}$$

$P^{-1}\mathbf{x}$ transformerer $\mathbf{x}$ til koordinater i basisen dannet av kolonne vektorene i P,

$$B = \{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \},$$

eller $P^{-1}\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_B$. Da vil $D[\mathbf{x}]_B$ være transformasjonen i basisen B, dvs. koordinatene til den transformerte vektoren i B; $[M\mathbf{x}]_B$. Den siste matrisemultiplikasjonen med P vil transformere den transformte vektoren tilbake til standard basisen. Se figur.



Dvs. at ved å bruke de normerte egenvektorene som basis vil transformasjonsmatrisen være D, som er diagonal.

e)

Bruk diagonaliseringen i c) til å finn M^{-1}. Finn grensen $\lim_{n\to\infty}(M^{-1})^n$.

Har at

$$M = PDP^T = PDP^{-1}$$

da blir

$$M^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = P(PD)^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^T$$

og

$$(M^{-1})^n = (PD^{-1}P^{-1})(PD^{-1}P^{-1})\dots(PD^{-1}P^{-1}) = P(D^{-1})^nP^{-1}$$

Finner $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ og dermed

$$\lim_{n\to\infty}(D^{-1})^n = \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Får da

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(M^{-1})^n &= \lim_{n\to\infty}P(D^{-1})^nP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$