Bokmål

UNIVERSITET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Onsdag 25 september, 2013, kl. 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler. kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
- Oppgavesettet er på 3 sider.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

Betrakt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Finn den reduserte trappeformen til A.

b. Avjør om $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er i søylerommet $\mathrm{Col}\,(A)$.

c. Finn den løsningen til ligningen $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d. Hva er rangen til matrisen A?

e. Hva er dimensjonen til nullrommet $\mathrm{Nul}\,(A)$?

f. Avjør om $\overrightarrow{b} = (4, 5)$ er i radrommet $\mathrm{Row}\,(A)$.

g. Hva er dimensjonen til $\mathrm{Row}\,(A)$?

Fasit til oppgave 1.

a. Finn den reduserte trappeformen til matrisen A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Avjør om $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **er i søylerommet** $\mathrm{Col}\,(A)$**.**

En vektor $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Col}\,(A)$ dersom systemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ er konsekvent. Vi finner den reduserte trappeformen for den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og konkluderer med at $\overrightarrow{b} \in \mathrm{Col}\,(A)$

c. Finn den løsningen til ligningen $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$**.**

Vi bruker den reduserte trappeformen til den utvidede matrisen og finner $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

d. Hva er rangen til matrisen A**?** Rangen til matrisen A er lik dimensjon til $\mathrm{Col}\,(A)$ som er 2.

e. Hva er dimensjonen til nullrommet $\mathrm{Nul}\,(A)$**?** Fra rangteoremet vet vi at $2 = \dim\big(\mathrm{Col}\,(A)\big) + \dim\big(\mathrm{Null}\,(A)\big)$. Siden dimensjonen til $\mathrm{Col}\,(A)$ er 2 konkluderer vi med at $\dim\Big(\mathrm{Nul}\,(A)\Big) = 0$.

f. Avjør om $\overrightarrow{c} = (4, 5)$ **er i radrommet** $\mathrm{Row}\,(A)$**.**
Vi kan skrive $4\overrightarrow{r_1} + 9\overrightarrow{r_2} = (4, 5)$ der r_1 og r_2 er den henholdsvis første og den andre raden i A. Det viser at $\overrightarrow{c} = (4, 5) \in \mathrm{Row}\,(A)$.

g. Hva er dimensjonen til $\mathrm{Row}\,(A)$**?** Vi ser at den første raden og den tredje raden i A er lineært avhengige og de to første radene er lineært uavhengige, som viser at $\dim\Big(\mathrm{Row}\,(A)\Big) = 2$.

Oppgave 2.

a. Betrakt de lineære transformasjonene $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definert ved

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 + y_3 \\ 3y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

Finn komposisjonstransformasjonen $S \circ T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$.

b La $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Vi lar $\mathcal{R}_\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære transformasjonen som roterer hver vektor i $\mathbb{R}^3$ om z-aksen med en vinkel ϕ mot urviserne. Finn standardmatrisen til $\mathcal{R}_\phi$ og finn bilde av vektoren $v = (1,1,1)$ under rotasjonen $\mathcal{R}_\phi$, når $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Fasit til oppgave 2.

a. Betrakt de lineære transformasjonene $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definert ved

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 + y_3 \\ 3y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Finn komposisjonstransformasjon $S \circ T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$.

Standard matrisen $[T]$ til transformasjonen T er

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

og standard matrisen $[S]$ til transformasjonen S er

$$[S] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da er matrisen til komposisjonstransformasjonen $S \circ T$

$$[S \circ T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -7 \\ -1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi konkluderer med at

$$(S \circ T)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -7 \\ -1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 4x + 2 \\ 3x_1 - 7x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$

b. La $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Vi lar $\mathcal{R}_\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære transformasjonen som roterer hver vektor i $\mathbb{R}^3$ om z-aksen med en vinkel ϕ mot urviserne. Finn standardmatrisen til $\mathcal{R}_\phi$ og finn bilde av vektoren $v = (1, 1, 1)$ under rotasjonen $\mathcal{R}_\phi$, når $\phi = \frac{\pi}{3}$..

Siden $\mathcal{R}_\phi$ dreier vektorer i xy-planet en vinkel φ mot urviseren får vi ved enkel trigonometri at

$$\mathcal{R}_\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det endelige resultatet blir at matrisen:

$$[\mathcal{R}_\phi] = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

svarer til rotasjonen $\mathcal{R}_\phi$.

Bildet av vektoren $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er vektoren $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ på grunn av at

$$\overrightarrow{w} = [\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.

Avjør om mengdene A og B er underrom av $\mathbb{R}^3$.

a. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{slik at} \quad x = 3y + 1, \quad z = -2y \right\},$

b. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{slik at} \quad x - y + z = 0 \right\}.$

Fasit til oppgave 3.

a. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \textbf{slik at} \quad x = 3y + 1, \quad z = -2y \right\}.$

Siden origo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ikke er i A, er mengden A ikke et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \textbf{slik at} \quad x - y + z = 0 \right\}.$

Origo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ er i B. La $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in B$, $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in B$. Da er

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{og} \quad y_1 - y_2 + y_3 = 0$$

etter definisjonen av B. Vi adderer $\overrightarrow{x}$ og $\overrightarrow{y}$. Det gir vektoren $\overrightarrow{z}$ der:

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Av likninger ovenfor ser vi at:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 + z_3 &= (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

og det vil si at $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in B$. Vi ser også at

$$cx_1 - cx_2 + cx_3 = c(x_1 - x_2 + x_3) = c \cdot 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c\overrightarrow{x} \in B.$$

Oppgave 4.

Betrakt matrisen $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Finn alle egenverdiene til M.

b. Finn en basis for hvert egenrommet.

c. Er matrisen M diagonaliserbar? Hvis svaret er "ja" finn da den diagonale matrisen som svarer til M. Dersom svar er "nei", forklar hvorfor matrisen M ikke er diagonaliserbar.

Fasit til oppgave 4.

a. Finn alle egenverdiene til M.

Siden

$$\det(A - \lambda I) = x(x^2 - 12x + 36)$$

finner vi egenverdiene:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 6.$$

b. Finn en basis for hvert egenrommet.

La $\lambda_1 = 0$. Vi finner at matrisen M er radekvivalent til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det medfører at løsningen til likningen $M\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$ er

$$\overrightarrow{v_1} = x_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

For å finne de andre egenvektorene løser vi matriselikningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da har vi at $x_1 = -x_2 + 2x_3$ og egenrommet V_6 for egenverdien $\lambda = 6$ er

$$V_6 = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Så $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Er matrisen M diagonaliserbar? Hvis svaret er "ja" finn da den diagonale matrisen som svarer til M. Dersom svar er "nei", forklar hvorfor matrisen M ikke er diagonaliserbar. Matrisen M er diagonaliserbar fordi sum av dimensjoner av egenrommene er lik 3. Tilsvarende diagonal matrisen er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercise 5.

La V være underrommet av $\mathbb{R}^3$ definert ved

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{slik at} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

a. Vis at $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

b. Finn en ortonormal basis

$$\alpha = (\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3)$$

fra systemet av vektorene $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

c. Finn basisskiftematrisen $M_{e\to\alpha}$ fra standard basisen $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ til basisen α.

d. Regn ut $M^T_{e\to\alpha} M_{e\to\alpha}$.

e. Hvilke av vektorene $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ hører til V?

f. La $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være projeksjon på V: $P(\overrightarrow{x}) = \mathrm{proj}_{\mathrm{V}}(\overrightarrow{x})$. Finn matrisen M_α av den lineære transformasjonen P med hensyn på basisen α.

Fasit til oppgave 5.

a. Vis at $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

Vi regner ut indre productet

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 + (-1) + 0 = 0, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 1 + 1 - 2 = 0, \quad \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 1 - 1 + 0 = 0,$$

som sier at $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ er ortogonale.

b. Finn en ortonormal basis

$$\alpha = (\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3)$$

fra systemet av vektorene $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

La $\overrightarrow{\alpha}_1 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha}_2 = \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha}_3 = \frac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.
Systemet $\alpha = (\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3)$ er ortonormalt.

c. Finn basisskiftematrisen $M_{e\to\alpha}$ fra standard basisen $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ til basisen α.

$$M_{e\to\alpha} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

d. Regn ut $M^T_{e\to\alpha} M_{e\to\alpha}$.

$$M^T_{e\to\alpha} M_{e\to\alpha} = M^{-1}_{e\to\alpha} M_{e\to\alpha} = 1$$

fordi $M_{e\to\alpha}$ er enortogonal matrise og derfor er $M^T_{e\to\alpha} = M^{-1}_{e\to\alpha}$.

e. Hvilke av vektorene $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ hører til V?
Vektorene $\overrightarrow{b}$ og $\overrightarrow{c}$ hører til V.

f. La $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være projeksjon på V: $P(\overrightarrow{x}) = \mathrm{proj_V}(\overrightarrow{x})$. Finn matrisen $[P_\alpha]$ av den lineære transformasjonen P med hensyn på basisen α.

$$[P_\alpha] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$