Bokmål

Universitet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Onsdag 29 mai, 2013, kl. 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler: kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
- Oppgavesettet er på 3 sider.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix}.$$

a. Finn determinanten til A.
b. Finn den reduserte trappeformen til A.
c. Finn en basis for nullrommmet $\mathrm{Nul}\,(A)$. Hva er dimensjonen til $\mathrm{Nul}\,(A)$?
d. Finn den generelle løsningen til ligningen $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
e. Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}\,(A)$. Hva er rangen til A?
f. Finn alle egenverdier og egenvektorer for A.
g. Er A diagonaliserbar? Hvis "ja": finn den tilsvarende diagonal matrisen.
h. Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}\,(A)$.

Oppgave 2.

a. Anta at B er en $n \times n$ matrise slik at $B^T = B^{-1}$. Hva er $\det(B^3)$?
b. Anta at B er en $n \times n$ matrise slik at $B^T = -B$. Finn summen

$$b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn}.$$

c. Anta at B er en 3×3 matrise slik at $B^T = -B$. Finn $\det(B)$.

d. Anta at C er en $n \times n$ matrise slik at $\det(C) = 1$ og alle elementer c_{ij} i C er hele tall. La $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ være slik at alle koordinater b_j, $j = 1, \ldots, n$, også er hele tall. Bevis at løsningen til systemet $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ er en vektor som består av hele tall.

Hint: bruk Cramers regel.

e. Anta at A er en $n \times n$ diagonaliserbar matrise. Forklar sammenheng mellom egenverdier og egenvektorer til matrisene A og A^2.

Oppgave 3.

La $\alpha = (\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3, \overrightarrow{\alpha}_4)$ der

$$\overrightarrow{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Vis at α er en basis for $\mathbb{R}^4$ og finn en matrise P slik at $P\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_\alpha$.

b. La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være en lineæravbildning slik at

$$T(\overrightarrow{\alpha}_1) = \overrightarrow{\beta}_1, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_2) = \overrightarrow{\beta}_2, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_3) = \overrightarrow{\beta}_3, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_4) = \overrightarrow{\beta}_4,$$

der vektorene $\overrightarrow{\beta}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ er gitt ved

$$\overrightarrow{\beta}_1 = \overrightarrow{\alpha}_1 + \overrightarrow{\alpha}_2 + \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\beta}_2 = \overrightarrow{\alpha}_2 + \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4,$$
$$\overrightarrow{\beta}_3 = \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\beta}_4 = \overrightarrow{\alpha}_1.$$

Finn α-matrisen $[T]_\alpha$ til avbildningen T.

c. Finn standardmatrisen til lineæravbildningen gitt i punkt b.

d. La vektorene $\overrightarrow{\gamma}_1, \overrightarrow{\gamma}_2, \overrightarrow{\gamma}_3, \overrightarrow{\gamma}_4$ være gitt ved

$$\overrightarrow{\gamma}_1 = \overrightarrow{\alpha}_1 - \overrightarrow{\alpha}_2, \qquad \overrightarrow{\gamma}_2 = \overrightarrow{\alpha}_2 - \overrightarrow{\alpha}_3,$$
$$\overrightarrow{\gamma}_3 = \overrightarrow{\alpha}_3 - \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\gamma}_4 = \overrightarrow{\alpha}_4 - \overrightarrow{\alpha}_1,$$

der $\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3, \overrightarrow{\alpha}_4$ er en basis av et vektorrom V. Finn en basis for vektorrommet $W = \operatorname{span}\{\overrightarrow{\gamma}_1, \overrightarrow{\gamma}_2, \overrightarrow{\gamma}_3, \overrightarrow{\gamma}_4\}$ og angi dimensjonen til W.

Oppgave 4.

a. La $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bevis at

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|.$$

Hint: bruk $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$.

b. La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Definerer et produkt i $\mathbb{R}^2$ med hensyn til den symmetriske matrisen A ved

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (\overrightarrow{x})^T A \overrightarrow{y}. \tag{1}$$

Finn $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ slik at $\overrightarrow{u}_1 \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}_2 \neq 0$ og $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0$ med hensyn til produktet definert i formel (1). Med andre ord mengden $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ må være ortogonal med hensyn til produktet definert ved matrisen A.

Hint: bruk Gram-Schmidt prosedyren med hensyn til produktet definert i formel (1) for standardbasisen $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ for $\mathbb{R}^2$.