Bokmål

Universitet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Onsdag 29 mai, 2013, kl. 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler. kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
- Oppgavesettet er på 3 sider.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix}.$$

a. Finn determinanten til A.
b. Finn den reduserte trappeformen til A.
c. Finn en basis for nullrommmet $\mathrm{Nul}\,(A)$. Hva er dimensjonen til $\mathrm{Nul}\,(A)$?
d. Finn den generelle løsningen til ligningen $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
e. Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}\,(A)$. Hva er rangen til A?
f. Finn alle egenverdier og egenvektorer for A.
g. Er A diagonaliserbar? Hvis "ja": finn den tilsvarende diagonal matrisen.
h. Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}\,(A)$.

Fasit til oppgave 1.

a. Finn determinanten til A.

$$\det(A) = 3 \det \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -15 & -5 \end{bmatrix} = 3(-30 + 30) = 0.$$

b. Finn den reduserte trappeformen til A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Finn en basis for nullrommmet $\mathrm{Nul}\,(A)$. Hva er dimensjonen til $\mathrm{Nul}\,(A)$?

Vi må finne løsninger til homogen lineær systemet

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

Vi bruker redusert trappeformen og finner

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da er $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_3$, som sier at basis for $\mathrm{Nul}\,(A)$ er $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ og dimensjon til $\mathrm{Nul}\,(A)$ er 1.

d. Finn den generelle løsningen til ligningen $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Den generelle løsningen er sum av løsningen til den homogene likning en og en spesielt løsning. La oss finne en spesielt løsning til $A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vi skriver utvidet matrisen og finne den reduserte trappeformen:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 9 \\ -4 & 6 & 2 & 6 \\ 16 & -15 & -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 18 \\ 0 & -15 & -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den generelle løsningen er $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

e. Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}\,(A)$. Hva er rangen til A? Det er klart at den andre og den tredje søylene er lineært avhengige siden $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Fra rangteoremet vet vi at $3 = \dim\big(\mathrm{Col}\,(A)\big) + \dim\big(\mathrm{Null}\,(A)\big) = \dim\big(\mathrm{Col}\,(A)\big) + 1$, da er dimensjon til $\mathrm{Col}\,(A)$ er 2 som sier at rang til A er 2. Vi velger basis vektorene for $\mathrm{Col}\,(A)$ som

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

f. Finn alle egenverdier og egenvektorer for A. Den karakteristiske ligningen for matrisen A er

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Så har vi tilsvarende egenverdiene og egenvektorene:

$$\lambda_1 = 3, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 = 0, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

g. Er A diagonaliserbar? Hvis "ja": finn den tilsvarende diagonal matrisen. Siden matrisen A har 3 forskellige egenverdier, er tilsvarende egenvektorer lineært uavhengige. Matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{er inverterbar og}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi finner diagonalmatrisen $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

h. Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}\,(A)$. Vi bruker Gram-Schmidt prosedyren. Velger $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \in \mathrm{Col}\,(A)$. La oss reigne ut

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 29, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = -88.$$

Dar er

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{u}_1} \vec{v}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \frac{88}{29} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{60}{29} \\ \\ \frac{24}{29}. \end{bmatrix}$$

Basisen $\overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{60}{29} \\ \\ \frac{24}{29} \end{bmatrix}$ er ortogonal basisen for $\mathrm{Col}\,(A)$.

Oppgave 2.

a. Anta at B er en $n \times n$ matrise slik at $B^T = B^{-1}$. Hva er $\det(B^3)$?
b. Anta at B er en $n \times n$ matrise slik at $B^T = -B$. Finn summen

$$b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn}.$$

c. Anta at B er en 3×3 matrise slik at $B^T = -B$. Finn $\det(B)$.
d. Anta at C er en $n \times n$ matrise slik at $\det(C) = 1$ og alle elementer c_{ij} i C er hele tall. La $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ være slik at alle koordinater b_j, $j = 1, \ldots, n$, også er hele tall. Bevis at løsningen til systemet $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ er en vektor som består av hele tall.

   Hint: bruk Cramers regel.
e. Anta at A er en $n \times n$ diagonaliserbar matrise. Forklar sammenheng mellom egenverdier og egenvektorer til matrisene A og A^2.

Fasit til oppgave 2.

a. Anta at B er en $n \times n$ matrise slik at $B^T = B^{-1}$. Hva er $\det(B^3)$?

$$1 = \det(I) = \det(BB^{-1}) = \det(BB^T) = \det(B)\det(B^T) = \big(\det(B)\big)^2$$

Derfor er $\det B = \pm 1$ og $\det(B^3) = \big(\det(B)\big)^3 = \pm 1$.

b. Anta at B er en $n \times n$ matrise slik at $B^T = -B$. Finn summen

$$b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn}.$$

Dersom $B^T = -B$ da er $b_{jj} = -b_{jj}$ som medfører at $b_{jj} = 0$. Vi får at

$$b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn} = 0.$$

c. Anta at B er en 3×3 matrise slik at $B^T = -B$. Finn $\det(B)$. Siden $B^T = -B$ får vi

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \det B = -a\big(-1(c)(-b)\big) + b\big((-a)(-c)\big) = 0.$$

d. Anta at C er en $n \times n$ matrise slik at $\det(C) = 1$ og alle elementer c_{ij} i C er hele tall. La $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ være slik at alle koordinater b_j, $j = 1, \dots, n$, også er hele tall. Bevis at løsningen til systemet $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ er en vektor som består av hele tall.

Hint: bruk Cramers regel. .

Vi betegner C_j matrisen der byttet vi i matrisen C j-søyle med $\overrightarrow{b}$. Cramers regel sier at

$$x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(C)} = \det(C_j).$$

Å finne determinanten $\det(C_j)$ måvi bare bruke addisjon og multiplikasjon av hele tall. Resultat blir et hel tall.

e. Anta at A er en $n \times n$ diagonaliserbar matrise. Forklar sammenheng mellom egenverdier og egenvektorer til matrisene A og A^2.

Matrisen A har n egenverdier regnet med multiplisitet. La λ være en egenverdi for A og $\overrightarrow{v}$ den tilsvarende egenvektoren. Da har vi

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} \quad \Longrightarrow \quad A^2\overrightarrow{v} = A(A\overrightarrow{v}) = A(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda A(\overrightarrow{v}) = \lambda^2\overrightarrow{v}.$$

Vi konkluderer at A og A^2 har like egenvektorer, men egenverdier for A^2 lik kvadrat av egenverdier til A.

Oppgave 3.

La $\alpha = (\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3, \overrightarrow{\alpha}_4)$ der

$$\overrightarrow{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Vis at α er en basis for $\mathbb{R}^4$ og finn en matrise P slik at $P\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_\alpha$.

b. La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være en lineæravbildning slik at

$$T(\overrightarrow{\alpha}_1) = \overrightarrow{\beta}_1, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_2) = \overrightarrow{\beta}_2, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_3) = \overrightarrow{\beta}_3, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_4) = \overrightarrow{\beta}_4,$$

der vektorene $\overrightarrow{\beta}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ er gitt ved

$$\overrightarrow{\beta}_1 = \overrightarrow{\alpha}_1 + \overrightarrow{\alpha}_2 + \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\beta}_2 = \overrightarrow{\alpha}_2 + \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4,$$

$$\overrightarrow{\beta}_3 = \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\beta}_4 = \overrightarrow{\alpha}_1.$$

Finn α-matrisen $[T]_\alpha$ til avbildningen T.

c. Finn standardmatrisen til lineæravbildningen gitt i punkt b.

d. La vektorene $\overrightarrow{\gamma}_1, \overrightarrow{\gamma}_2, \overrightarrow{\gamma}_3, \overrightarrow{\gamma}_4$ være gitt ved

$$\overrightarrow{\gamma}_1 = \overrightarrow{\alpha}_1 - \overrightarrow{\alpha}_2, \qquad \overrightarrow{\gamma}_2 = \overrightarrow{\alpha}_2 - \overrightarrow{\alpha}_3,$$

$$\overrightarrow{\gamma}_3 = \overrightarrow{\alpha}_3 - \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\gamma}_4 = \overrightarrow{\alpha}_4 - \overrightarrow{\alpha}_1,$$

der $\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3, \overrightarrow{\alpha}_4$ er en basis av et vektorrom V. Finn en basis for vektorrommet $W = \text{span}\{\overrightarrow{\gamma}_1, \overrightarrow{\gamma}_2, \overrightarrow{\gamma}_3, \overrightarrow{\gamma}_4\}$ og angi dimensjonen til W.

Fasit til oppgave 3.

a. Vis at α er en basis for $\mathbb{R}^4$ og finn en matrise P slik at $P\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_\alpha$.
Vi former matrisen A ved søyler fra samling α:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siden $\det(A) = -1 \neq 0$ konkluderer vi at søyler i A er lineært uavhengige og vektorer fra α danner en basis for $\mathbb{R}^4$. Matrisen P slik at $P\overrightarrow{x} = [\overrightarrow{x}]_\alpha$ er lik inverse til A:

$$P = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være en lineæravbildning slik at

$$T(\overrightarrow{\alpha}_1) = \overrightarrow{\beta}_1, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_2) = \overrightarrow{\beta}_2, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_3) = \overrightarrow{\beta}_3, \quad T(\overrightarrow{\alpha}_4) = \overrightarrow{\beta}_4,$$

der vektorene $\overrightarrow{\beta}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ er gitt ved

$$\overrightarrow{\beta}_1 = \overrightarrow{\alpha}_1 + \overrightarrow{\alpha}_2 + \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\beta}_2 = \overrightarrow{\alpha}_2 + \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4,$$

$$\overrightarrow{\beta}_3 = \overrightarrow{\alpha}_3 + \overrightarrow{\alpha}_4, \qquad \overrightarrow{\beta}_4 = \overrightarrow{\alpha}_1.$$

Finn α-matrisen $[T]_\alpha$ til avbildningen T Matrisen $[T]_\alpha$ er

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Finn standardmatrisen til lineæravbildningen gitt i punkt b. Vi skriver i standardbasisen

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \quad \vec{\alpha}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{\alpha}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{\alpha}_4 = \vec{e}_4.$$

Da er

$$\begin{aligned} T(\vec{\alpha}_1) &= \vec{\beta}_1, && \Longrightarrow && T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_4) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ T(\vec{\alpha}_2) &= \vec{\beta}_2, && \Longrightarrow && T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ T(\vec{\alpha}_3) &= \vec{\beta}_3, && \Longrightarrow && T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ T(\vec{\alpha}_4) &= \vec{\beta}_4, && \Longrightarrow && T(\vec{e}_4) = \vec{e}_1 + \vec{e}_4. \end{aligned}$$

Vi finner

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ T(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ T(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ T(\vec{e}_4) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_4. \end{aligned}$$

Standardmatrisen er

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d. La vektorene $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_4$ være gitt ved

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2, \qquad \vec{\gamma}_2 = \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_3,$$

$$\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 - \vec{\alpha}_4, \qquad \vec{\gamma}_4 = \vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha}_1,$$

der $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ er en basis av et vektorrom V. Finn en basis for vektorrommet $W = \mathrm{span}\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_4\}$ og angi dimensjonen til W.

Vektorene $\vec{\gamma}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ er lineært avhengige siden $\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 = -\vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_4$ og en av $\vec{\gamma}_j$ er en lineært kombinasjon av de andre. La oss vise at $\vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_4$ er lineært uavhengige. La

$$a\vec{\gamma}_2 + b\vec{\gamma}_3 + c\vec{\gamma}_4 = 0, \quad , a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Da er

$$a(\vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_3) + b(\vec{\alpha}_3 - \vec{\alpha}_4) + c(\vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha}_1) = -c\vec{\alpha}_1 + a\vec{\alpha}_2 + (b-a)\vec{\alpha}_3 + (c-b)\vec{\alpha}_4 = 0.$$

Siden $\overrightarrow{\alpha}_1, \overrightarrow{\alpha}_2, \overrightarrow{\alpha}_3, \overrightarrow{\alpha}_4$ er lineært uavhengige konkluderer vi at

$$-c = a = b - a = c - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b = c = 0,$$

som viser at $\overrightarrow{\gamma}_2, \overrightarrow{\gamma}_3, \overrightarrow{\gamma}_4$ er lineært uavhengige og danner en basis for W. Dimenjon av W er 3.

Oppgave 4.

a. La $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bevis at

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|.$$

Hint: bruk $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$.

b. La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Definerer et produkt i $\mathbb{R}^2$ med hensyn til den symmetriske matrisen A ved

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (\overrightarrow{x})^T A \overrightarrow{y}. \tag{1}$$

Finn $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ slik at $\overrightarrow{u}_1 \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}_2 \neq 0$ og $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0$ med hensyn til produktet definert i formel (2). Med andre ord mengden $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ må være ortogonal med hensyn til produktet definert ved matrisen A.

Hint: bruk Gram-Schmidt prosedyren med hensyn til produktet definert i formel (2) for standardbasisen $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ for $\mathbb{R}^2$.

Fasit til oppgave 4.

a. La $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bevis at

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|.$$

Hint: bruk $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$.

Vi regner

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + 2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} \\ &\leq \|\overrightarrow{a}\|^2 + 2|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| + \|\overrightarrow{b}\|^2 \\ &\leq \|\overrightarrow{a}\|^2 + 2\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| + \|\overrightarrow{b}\|^2 \\ &= (\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|)^2 \end{aligned}$$

Ta kvadrad rot av bege sider.

b. La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$**. Definerer et produkt i** $\mathbb{R}^2$ **med hensyn til den symmetriske matrisen** A **ved**

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (\overrightarrow{x})^T A \overrightarrow{y}. \tag{2}$$

Finn $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ **slik at** $\overrightarrow{u}_1 \neq \overrightarrow{0}$**,** $\overrightarrow{u}_2 \neq 0$ **og** $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0$ **med hensyn til produktet definert i formel** (2)**. Med andre ord mengden** $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ **må være ortogonal med hensyn til produktet definert ved matrisen** A**.**

Hint: bruk Gram-Schmidt prosedyren med hensyn til produktet definert i formel (2) **for standardbasisen** $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ **for** $\mathbb{R}^2$**.**

Vi velger $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{e}_1$ og reiner

$$\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{e}_2 - \frac{\overrightarrow{e}_2^T A \overrightarrow{e}_1}{\overrightarrow{e}_1^T A \overrightarrow{e}_1} \overrightarrow{e}_1.$$

Vi får at

$$\overrightarrow{e}_2^T A \overrightarrow{e}_1 = (0,1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \overrightarrow{e}_1^T A \overrightarrow{e}_1 = (1,0) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Da er

$$\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{e}_2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{e}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mengde $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ er ortogonal med hensyn til produkt definert ved matrisen A.