Bokmål

Universitet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Onsdag 24 september, 2014, kl. 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler. kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
- Oppgavesettet er på 3 sider.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

a. Finn vilkår for a og b slik at systemet

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x + ay + bz = 2 \end{cases}$$

har

(i) ingen løsning,

(ii) uendelig mange løsninger,

(iii) en eneste løsning?

b. Betrakt koeffisientmatrisen for systemet: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & b \end{bmatrix}$. Finn relasjonene mellom a og b slik at matrisen A har

(i) $\mathrm{rank(A)} = 2$,

(ii) $\dim(\mathrm{Row(A)}) = 3$,

(iii) $\dim(\mathrm{Null(A)}) = 1$.

c. Sett $a = 3$, $b = 1$ i matrisen A.

(i) Finn løsningen av systemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}$, der $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ved hjelp av Cramers sin regel.

(ii) Skriv definisjonen av søylerommet til A. Finn $\dim(\mathrm{Col(A)})$ i dette tilfellet.

(iii) Hører vektoren $\overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ \sin 5 \end{bmatrix}$ til Col(A)?

Fasit til oppgave 1.

a. Finn vilkår for a og b slik at systemet

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+2y-z=1 \\ 2x+ay+bz=2 \end{cases}$$

har

(i) ingen løsning,
(ii) uendelig mange løsninger,
(iii) en eneste løsning?

Trappeformen til den utvidete matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2a+b-6 & -3a+12 \end{bmatrix}$$

(i) Dersom $2a+b-6=0$, mens $-3a+12 \neq 0$, finnes det ingen løsning. Det finnes ingen løsning dersom $a \neq 4$, og $2a+b-6=0$.

(ii) Dersom $2a+b-6=0$ og $-3a+12=0$, finnes det uendelig mange løsninger.

(iii) Det finnes en eneste løsning dersom $2a+b-6 \neq 0$.

b. Betrakt koeffisientmatrisen for systemet: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & b \end{bmatrix}$**. Finn relasjonene mellom a og b slik at matrisen A har**

(i) rank(A) = 2**,**
(ii) dim(Row(A)) = 3**,**
(iii) dim(Null(A)) = 1**.**

Trappeformen til matrisen A er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2a+b-6 \end{bmatrix}.$$

Derfor

(i) dersom $2a + b - 6 = 0$ har vi rank(A) = 2,
(ii) dersom $2a + b - 6 \neq 0$ har vi dim(Col(A)) = dim(Row(A)) = 3,
(iii) dersom $2a + b - 6 = 0$ har vi dim(Null(A)) = 1 siden

$$\mathrm{rank(A)} + \mathrm{dim(Null(A))} = 3$$

som sier rang-teoremet.

c. Sett $a = 3$, $b = 1$ i matrisen A.

(i) Finn løsningen av systemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}$, der $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ved hjelp av Cramers sin regel.

(ii) Skriv definisjonen av søylerommet til A. Finn dim(Col(A)) **i dette tilfellet.**

(iii) Hører vektoren $\overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ \sin 5 \end{bmatrix}$ til Col(A)**?**

(i) Cramers sin regelen sier at løsninger er $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$. Vi regner ut at $\det(A) = 1$, $\det(A_1) = -14$, $\det(A_2) = 9$, $\det(A_3) = 3$. Derfor er løsningen

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -14 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(ii) Col(A) = span$\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$ eller Col(A) er vektorrommet utspent av søylene i matrisen A. Dersom $a = 3$, $b = 1$, konkluderer vi fra trappeformen til A at dim(Col(A)) = 3

(iii) Siden søylene i A spenner hele $\mathbb{R}^3$ (se på **(ii)**) hører vektoren $\overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ \sin 5 \end{bmatrix}$ til Col(A)

Oppgave 2.

La

$$\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{a}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Er vektorene $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$ lineært uavhengige? Hvorfor?
b) Hva er dimensjonen til vektorrommet utspent av vektorene $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$?
c) Hører vektoren $\overrightarrow{a}_1$ til span$\{\overrightarrow{a}_2\}$?

d) Skriv vektoren $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (dersom det er mulig) som en lineær kombinasjon av vektorene $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$.

e) Finn $\dim(W)$, der $W = \text{span}\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}\}$.

f) Finn $\det(A)$, der $A = [\overrightarrow{a}_1\ \overrightarrow{a}_2\ \overrightarrow{b}]$.

Fasit til oppgave 2.

a) Er vektorene $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$ lineært uavhengige? Hvorfor? Vektorer $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$ er lineæruavhengige siden matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ har trappeformen $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ med to pivotsøyler.

b) Hva er dimensjonen av vektorrommet utspent av vektorene $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$? $\dim(\text{span}\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}) = 2$

c) Hører vektoren $\overrightarrow{a}_1$ til $\text{span}\{\overrightarrow{a}_2\}$**?** Nei, siden vektorer $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$ er lineært uavhengige og det er umulig å skrive $\overrightarrow{a}_2 = c\overrightarrow{a}_1$.

d) Skriv vektoren $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (dersom det er mulig) som en lineær kombinasjon av vektorer $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$.) Vi må finne tall x_1, x_2 (hvis mulig) slik at

$$x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{b}.$$

Det tilsvarende ligningsystemet er

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

med utvidet matrise

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

som har trappeformen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi går tilbake til ligningene

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

som gir $x_2 = 1$, $x_1 = -2$.

e) Finn $\dim(W)$**, der** $W = \text{span}\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}\}$**.** $\dim(W) = 2$, der $W = \text{span}\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{b}\}$ siden $\overrightarrow{b} \in \text{span}\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$ og kan fjernes fra W.

f) Finn $\det(A)$**, der** $A = [\overrightarrow{a}_1 \ \overrightarrow{a}_2 \ \overrightarrow{b}]$**.** $\det(A) = 0$, der $A = [\overrightarrow{a}_1 \ \overrightarrow{a}_2 \ \overrightarrow{b}]$ siden det finnes kun to linear uavhengige søyler $\overrightarrow{a}_1$ $\overrightarrow{a}_2$ i matrisen A.

Oppgave 3.

La $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\}$ være basisen for $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\overrightarrow{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Regn ut $\mathcal{B}$-koordinatene $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ til vektoren $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) Skriv basisskiftematrisen $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ fra basisen $\mathcal{B}$ til standardbasisen $\mathcal{E}$.

c) La $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \overrightarrow{c}_3\}$ være en annen basis for $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\overrightarrow{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Finn basisskiftematrisen $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{C}$.

d) Regn ut $\mathcal{C}$-koordinatene $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{C}}$ til vektoren $\overrightarrow{x}$ dersom $\mathcal{B}$-koordinatene er

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fasit til oppgave 3.

a) Regn ut $\mathcal{B}$**-koordinatene** $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}}$ **av vektoren** $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$**.**

Hvis vi tenker oss at $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ må $y_1 \overrightarrow{b}_1 + y_2 \overrightarrow{b}_2 + y_3 \overrightarrow{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dette kan skrives som lineært ligningsystemet

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ y_3 = 1 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

som har løsning $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$. Dermed er $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Skriv basisskiftematrisen $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ fra basisen $\mathcal{B}$ til standardbasisen $\mathcal{E}$. Basisskiftematrisen $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ er

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = [\,\overrightarrow{b}_1\ \overrightarrow{b}_2\ \overrightarrow{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) La $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \overrightarrow{c}_3\}$ være en annen basis for $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\overrightarrow{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Finn basisskiftematrisen $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{C}$. Basisskiftematrisen $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ kan finnes fra formelen $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C}\mathcal{E}})^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ og

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

d) Regn ut $\mathcal{C}$-koordinatene $[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{C}}$ av vektoren $\overrightarrow{x}$ dersom $\mathcal{B}$-koordinatene er

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi finner at

$$[\overrightarrow{x}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} [\overrightarrow{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4.

Betrakt matrisene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Regn ut eigenverdiene til matrisen B.
b) Regn ut eigenvektorene til matrisen B.
c) Gi definisjonen av similære matriser. Er matrisene B og C similære?
d) Finn matrisen P som diagonaliserer matrisen B.

Fasit til oppgave 4.

a) Regn ut eigenverdiene til matrisen B. Det karakteristike polynomet er $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Det viser at eigenverdene er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. $\lambda_3 = 3$.

b) Regn ut eigenvektorene til matrisen B. For å finne eigenvektorene løser vi lineære ligninger $(A - \lambda_i I)\overrightarrow{v}_i = 0$. Vi regner ut at

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

c) Gi definisjonen av similære matriser. Er matrisene B or C similære? En matrise B er similær eller likedannet til en matrise C dersom det finnes en matrise P som består av lineær uavhengige vektorer slik at

$$B = P^{-1}CP$$

Matrisene B og C similære siden de har like eigenverdier.

d) Finn matrisen P som diagonaliserer matrisen B. Matrisen P består av eigenvektorene

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5.

La

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Anta at $W = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

a) Bestem om $\vec{u}$ hører til ortogonalkomplementet $W^{\perp}$ til W.

b) Finn basisen for $W^{\perp}$.

(*Hint.* En vektor $\vec{x}$ hører til $W^{\perp} = (\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\})^{\perp}$ hvis og bare hvis $A^T\vec{x} = \vec{0}$, der A^T er den transponerte matrisen av $A = [\vec{a}_1 \vec{a}_2]$.)

Fasit til oppgave 5.

a) Bestem om $\vec{u}$ hører til ortogonal komplement $W^{\perp}$ til W. Vi sjekker

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{u} = 6 + 6 + 0 + 0,$$
$$\vec{a}_2 \cdot \vec{u} = 3 + 24 + 0 - 5 = 22$$

Derfor er $u \notin W^{\perp}$.

b) Finn basisen for $W^{\perp}$. Vi løser lineærligningen

$$A^T\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Da $W^{\perp} = \mathrm{Null(A^T)}$ og basisen for $W^{\perp}$ er basisen for $\mathrm{Null(A^T)}$. Basisen for $\mathrm{Null(A^T)}$ er

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Professor Irina Markina