Bokmål

Universitet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Tirsdag 27 mai, 2014, kl. 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler: kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
- Oppgavesettet er på 3 sider.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

Betrakt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & h^2+3h \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3h \end{bmatrix}.$$

a. For hvilke verdier av h har ligningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ henholdsvis
   (i) én løsning,
   (ii) ingen løsning,
   (iii) uendelig mange løsninger?

b. Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}\,(B)$ til den utvidete matrisen $B = [A\ \overrightarrow{b}\,]$ når $h = -4$. Hva er rangen til B i dette tilfelle?

c. Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}\,(B)$ til den utvidete matrisen $B = [A\ \overrightarrow{b}\,]$ når $h = 1$. Hva er rangen til B i dette tilfelle? Hører vektoren $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ til $\mathrm{Nul}\,(B)$ når $h = 1$?

Oppgave 2.

La $\mathbb{P}_2$ være vektorrommet av polynom av grad høyst 2 med basisen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. La $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(a + bt + ct^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)t + 5ct^2.$$

a. Hva er $\mathcal{B}$-koordinater $[p(t)]_{\mathcal{B}}$ til polynomet $p(t) = a + bt + ct^2$? Med andre ord, finn koordinatene til polynomet $p(t)$ med hensyn til basisen $\mathcal{B}$.
b. Skriv $\mathcal{B}$ matrisen $M_{\mathcal{B}} = \left[[T(1)]_{\mathcal{B}}\ [T(t)]_{\mathcal{B}}\ [T(t^2)]_{\mathcal{B}} \right]$ til lineæravbildningen T.
c. Finn egenverdiene til lineæravbildningen T. Husk at egenverdiene til lineæravbildningen T er egenverdiene til matrisen $M_{\mathcal{B}}$ som du har funnet i punkt b.
d. Finn en basis for hvert egenrom til avbildningen T.
e. Skriv basisene for egenrommene på form av polynom fra $\mathbb{P}_2$.
f. Hvorfor er egenvektorene til matrisen $M_{\mathcal{B}}$ lineært uavhengige? Er matrisen $M_{\mathcal{B}}$ diagonaliserbar?

Oppgave 3.

La $W = \text{span}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$, der $\overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. Danner vektorene $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ en ortogonal basis for W? Begrunn svaret.
b. Finn en ortonormal basis for W. (Hint: bruk Gramm-Schmidt ortogonalisering.)
c. La $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Finn den beste approksimasjonen til $\overrightarrow{v}$ i rommet W. Med andre ord, finn $\overrightarrow{w} \in W$ slik at $\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{z}\|$ for enhver $z \in \mathbb{R}^3$.
d. Finn avstanden fra $\overrightarrow{v}$ til W.
e. Skriv normalligningen for minste kvadraters-problemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$, der $A = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2]$ og finn løsningen til dette minste kvadraters-problemet.

Oppgave 4.

Et kjeglesnitt har ligningen:

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36.$$

a. Utfør et koordinatskifte fra (x_1, x_2) til (y_1, y_2), slik at ligningen for kjeglesnittet får formen

$$ay_1^2 + by_2^2 = d.$$

b. Tegn figur i standardposisjonen. Hva er navnet til denne figuren: ellipse eller hyperbel?

c. Gi definisjonen av en symmetrisk matrise. Hvilke av følgende matriser er symmetriske

(i) A^TA,

(ii) $A + A^T$,

(iii) $A - A^T$?

Begrunn svaret.

d. Regn ut summen av alle elementer på hoveddiagonalen i matrisen $A - A^T$.

Professor

Irina Markina

Sensorer

Alexander Lundervold,
Antonella Zanna Munthe Kaas