Bokmål

Universitet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Tirsdag 27 mai, 2014, kl. 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler. kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
- Oppgavesettet er på 3 sider.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

Betrakt matrisen og vektoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & h^2+3h \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3h \end{bmatrix}.$$

a. For hvilke verdier av h har ligningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ henholdsvis
   (i) én løsning,
   (ii) ingen løsning,
   (iii) uendelig mange løsninger?

b. Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}\,(B)$ til den utvidete matrisen $B = [A\ \overrightarrow{b}\,]$ når $h = -4$. Hva er rangen til B i dette tilfelle?

c. Finn en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}\,(B)$ til den utvidete matrisen $B = [A\ \overrightarrow{b}\,]$ når $h = 1$. Hva er rangen til B i dette tilfelle? Hører vektoren $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ til $\mathrm{Nul}\,(B)$ når $h = 1$?

Fasit til oppgave 1.

a. For hvilke verdier av h har ligningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ henholdsvis

(i) én løsning,

(ii) ingen løsning,

(iii) uendelig mange løsninger?

Trappeformen til den utvidete matrisen $B = [A\ \overrightarrow{b}\,]$ er

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h^2+3h-4 & 3-3h \end{bmatrix}$$

Dersom $h^2+3h-4 \neq 0$, så har ingen rad pivotelement til slutt (i "$\overrightarrow{b}$"-delen), og ligningen har derfor minst én løsning. I tillegg er alle søyler i "A"-delen pivotsøyler, så løsningen må være entydig. Siden ligningen $h^2+3h-4=0$ har løsningene $h=1$ og $h=-4$, har vi derfor:

(i) **Dersom $h \neq 1$ og $h \neq -4$, så har ligningen nøyaktig én løsning.**

For $h = 1$, er trappematrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden ingen rad har pivotelement til slutt, har ligningen løsninger, og siden den tredje søyle ikke er en pivotsøyle, må det finnes uendelig mange av dem. Vi har dermed:

(ii) **Dersom $h = 1$ har ligningen uendelig mange løsninger.**

For $h = -4$, er trappematrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Her har den nederste raden et pivotelement til slutt. Dermed kan vi konkludere med

(iii) **Dersom $h = -4$, har ligning ingen løsning.**

Som alternativ løsning, kan vi beregne $\det A = h^2+3h-4$. Dersom $\det A \neq 0$ har ligningen én entydig løsning. Dersom $\det A = 0$, fortsette vi som i (ii) og (iii).

b. Finn en basis for søylerommet $\mathrm{Col}\,(B)$ til den utvidete matrisen $B = [A\ \overrightarrow{b}\,]$ når $h = -4$. Hva er rangen til B i dette tilfelle?

Når $h = -4$, ser vi at pivotsøylene i trappeformen er søyle 1,2 og 4. De tilsvarende søylene i B utgjør da en basis for søylerommet, dvs. at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Siden $\operatorname{rank}(B) = \dim(\operatorname{Col}(B))$, konkluderer vi at $\operatorname{rank}(B) = 3$.

c. Finn en basis for nullrommet $\operatorname{Nul}(B)$ **til den utvidete matrisen** $B = [A\ \overrightarrow{b}]$ **når** $h = 1$**. Hva er rangen til** B **i dette tilfelle? Hører vektoren** $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **til** $\operatorname{Nul}(B)$ **når** $h = 1$**?**

Når $h = 1$, har vi sett at B har trappeformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nullrommet består av løsninger til ligningssytemet $B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, eller

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Her kan x_3 og x_4 velges fritt, og vi har

$$x_1 = 2x_3 - x_4, \quad x_2 = -x_3 + x_4.$$

På vektorform kan løsningene altså skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4.$$

Dette viser at nullrommet er utspent av vektorene

$$\overrightarrow{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For å beregne $\operatorname{rank}(B)$ i dette tilfelle bruker vi rangteoremet, som sier at

$$\operatorname{rank}(B) + \dim(\operatorname{Null}(B)) = n,$$

der n er antal av søyler i B. Siden $n = 4$ og $\dim(\operatorname{Null}(B)) = 2$, konkluderer vi at $\operatorname{rank}(B) = 2$ når $h = 1$.

Vektoren $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hører til Nul(B) dersom det finnes reelle tall c_1 og c_2 slik at $c_1\overrightarrow{y}_1 + c_2\overrightarrow{y}_2 = \overrightarrow{y}$. Det er lett å se at når $c_1 = 1$ og $c_2 = 1$, får vi at $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2$. Vi konkluderer at $\overrightarrow{y} \in$ Nul(B).

Oppgave 2.

La $\mathbb{P}_2$ være vektorrommet av polynom av grad høyst 2 med basisen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. La $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(a + bt + ct^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)t + 5ct^2.$$

a. Hva er $\mathcal{B}$-koordinater $[p(t)]_{\mathcal{B}}$ til polynomet $p(t) = a + bt + ct^2$? Med andre ord, finn koordinatene til polynomet $p(t)$ med hensyn til basisen $\mathcal{B}$.
b. Skriv $\mathcal{B}$ matrisen $M_{\mathcal{B}} = [T(1)\ T(t)\ T(t^2)]$ til lineæravbildningen T.
c. Finn egenverdiene til lineæravbildningen T. Husk at egenverdiene til lineæravbildningen T er egenverdiene til matrisen $M_{\mathcal{B}}$ som du har funnet i punkt b.
d. Finn en basis for hvert egenrom til avbildningen T.
e. Skriv basisene for egenrommene på form av polynom fra $\mathbb{P}_2$.
f. Hvorfor er egenvektorene til matrisen $M_{\mathcal{B}}$ lineært uavhengige? Er matrisen $M_{\mathcal{B}}$ diagonaliserbar?

Fasit til oppgave 2.

a. Hva er $\mathcal{B}$-koordinater $[p(t)]_{\mathcal{B}}$ til polynomet $p(t) = a + bt + ct^2$? Med andre ord, finn koordinatene til polynomet $p(t)$ med hensyn til basisen $\mathcal{B}$.

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = [(a + bt + ct^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

b. Skriv $\mathcal{B}$ matrisen $M_{\mathcal{B}} = [T(1)\ T(t)\ T(t^2)]$ til lineæravbildningen T

$$M_{\mathcal{B}} = [[T(1)]_{\mathcal{B}}\ [T(t)]_{\mathcal{B}}\ [T(t^2)]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

c. Finn egenverdiene til lineæravbildningen T. Husk at egenverdiene til lineæravbildningen T er egenverdiene til matrisen $M_{\mathcal{B}}$ som du har funnet i punkt b.

$$\det(M_{\mathcal{B}} - \lambda I) = (5-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = (5-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

Det finnes to egenverdier: $\lambda = 1$ med multiplisitet en og $\lambda = 5$ med multiplisitet to.

d. Finn en basis for hvert egenrom til avbildningen T.
Dersom $\lambda = 1$, da blir løsningen til ligningen

$$(M_{\mathcal{B}} - I)\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

lik

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Egenvektoren $\vec{v}_1$ som svarer til egenverdien $\lambda = 1$ er gitt ved $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Disse daner en basis til egenrommet som svarer til egenverdien $\lambda = 1$.

Dersom $\lambda = 5$ finner vi at løsning til ligningen

$$(M_{\mathcal{B}} - 5I)\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

er

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad s, r \in \mathbb{R}.$$

Basisen $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ for egenrommet som svarer til $\lambda = 5$ er gitt ved

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e. Skriv basisene for egenrommene på form av polynom fra $\mathbb{P}_2$

Til vektoren $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ svarer polynomet $p_1(t) = 1 + t$. Til vektorene

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

svarer henholdsvis polynomene

$$p_2(t) = -1 + t, \quad \text{og} \quad p_3(t) = t^2.$$

f. Hvorfor er egenvektorene til matrisen $M_{\mathcal{B}}$ lineært uavhengige? Er matrisen $M_{\mathcal{B}}$ diagonaliserbar?

Vektorene $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ er lineært uavhengige fordi matrisen $[\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3]$ er radekvivalent med identitesmatrisen.

Vi kan også argumentere at $\overrightarrow{v}_2$ og $\overrightarrow{v}_3$ ikke er multippel av hverandre, så er de lineært uavhengige. Vektoren $\overrightarrow{v}_1$ er lineært uavhengig av $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ siden de svarer til ulike egenverdiene.

Matrisen $M_{\mathcal{B}}$ er diagonaliserbar, siden det finnes 3 lineært uavhengige egenvektorer $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$, som kan brukes for å lage basisskiftematrisen P.

Oppgave 3.

La $W = \text{span}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$, der $\overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. Danner vektorene $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ en ortogonal basis for W? Begrunn svaret.

b. Finn en ortonormal basis for W. (Hint: bruk Gramm-Schmidt ortogonalisering.)

c. La $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Finn den beste approksimasjonen til $\overrightarrow{v}$ i rommet W. Med andre ord, finn $\overrightarrow{w} \in W$ slik at $\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{z}\|$ for enhver $z \in \mathbb{R}^3$.

d. Finn avstanden fra $\overrightarrow{v}$ til W.

e. Skriv normalligningen for minste kvadraters-problemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$, der $A = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2]$ og finn løsningen til dette minste kvadraters-problemet.

Fasit til oppgave 3.

a. Danner vektorene $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ en ortogonal basis for W? Begrunn svaret.
Vektorene $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ er lineært uavhengige fordi matrisen $A = [\vec{u}_2, \vec{u}_1]$ har to søyler som pivotsøyler. Det kan vi se fra

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi regner indreproduktet $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 6$ og konkluderer at vektorene ikke er ortogonale. Vektorene $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ danner dermed en basis som ikke er ortogonal.

b. Finn en ortonormal basis for W. (Hint: bruk Gramm-Schmidt ortogonalisering.)
For å finne en ortonormal basis kan vi bruke Gramm - Schmidt ortogonalisering. Vi velger $\vec{v}_1 = \vec{u}_2$ og regner

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dessuten

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \text{proj}_{\vec{x}_1} \vec{u}_1 = \vec{u}_1 - (\vec{x}_1 \cdot \vec{u}_1)\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserer $\vec{v}_2$ og får

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Basisen $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ er en ortonormalbasis for W.

c. La $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Finn den beste approksimasjonen til $\vec{v}$ i rommet W. Med andre ord, finn $\vec{w} \in W$ slik at $\|\vec{v} - \vec{w}\| \leq \|\vec{v} - \vec{z}\|$ for enhver $z \in \mathbb{R}^3$.
Den beste approksimasjon er gitt ved $\text{proj}_W \vec{v}$. Vi regner med bruk av ortonormalbasisen $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ for W:

$$\text{proj}_W \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{x}_2)\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

d. Finn avstanden fra $\overrightarrow{v}$ til W.

Avstanden fra $\overrightarrow{v}$ til W er gitt ved $\|\overrightarrow{v} - \text{proj}_W \overrightarrow{v}\|$. Siden

$$\overrightarrow{v} - \text{proj}_W \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12}{5} \\ \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

får vi $\|\overrightarrow{v} - \text{proj}_W \overrightarrow{v}\| = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

e. Skriv normalligningen for minste kvadraters-problemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$, der $A = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2]$ og finn løsningen til dette minste kvadraters-problemet.

Normalligningen for minste kvadraters-problemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ er

$$A^T A \overrightarrow{x} = A^T \overrightarrow{v}$$

og løsningen er $\overrightarrow{x} = (A^T A)^{-1} A^T \overrightarrow{v}$. Siden matrisen $A = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2]$ består av lineært uavhengige vektorer er matrisen $A^T A$ inverterbar. Vi regner

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 36 \end{bmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da er

$$\overrightarrow{x} = (A^T A)^{-1} A^T \overrightarrow{v} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Den andre mulighet å løse minste kvadraters-problemet er å løse ligningen $A\overrightarrow{x} = \text{proj}_W \overrightarrow{v}$ som er

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 7/15 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4.

Et kjeglesnitt har ligningen:

$$5x_1^2 - 4x_1 x_2 + 8x_2^2 = 36.$$

a. Utfør et koordinatskifte fra (x_1, x_2) til (y_1, y_2), slik at ligningen for kjeglesnittet får formen
$$ay_1^2 + by_2^2 = d.$$
b. Tegn figur i standardposisjonen. Hva er navnet til denne figuren: ellipse eller hyperbel?
c. Gi definisjonen av en symmetrisk matrise. Hvilke av følgende matriser er symmetriske
   (i) $A^T A$,
   (ii) $A + A^T$,
   (iii) $A - A^T$?
   Begrunn svaret.
d. Regn ut summen av alle elementer på hoveddiagonalen i matrisen $A - A^T$.

Fasit til oppgave 4.

a. Utfør et koordinatskifte fra (x_1, x_2) til (y_1, y_2), slik at ligningen for kjeglesnittet får formen
$$ay_1^2 + by_2^2 = d.$$

Vi danner matrisen: $M = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ og finner egenverdiene av ligningen:
$$\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0.$$
Verdien $\lambda_1 = 4$ gir egenvektorene
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad s \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$
Verdien $\lambda_2 = 9$ gir egenvektorene
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} s, \quad s \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$
Vi velger
$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
slik at matrisen: $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ blir ortogonal. I dette nye (y_1, y_2)-systemet blir $\overrightarrow{v}_1$ enhetsvektoren langs den positive y_1-aksen, mens $\overrightarrow{v}_2$ blir enhetsvektoren langs den positive y_2-aksen. Vi har:
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

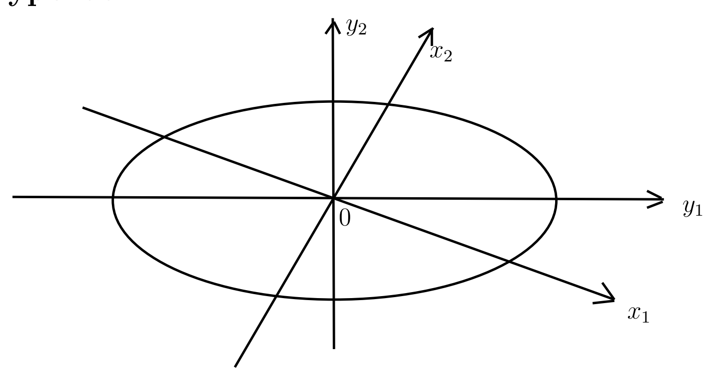
slik at

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2), \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x_1 + 2x_2).$$

Kjeglesnittet får ligningen:

$$4y_1^2 + 9y_2^2 = 36.$$

b. Tegn figur i standardposisjonen. Hva er navnet til denne figuren: ellipse eller hyperbel?



Det er en ellipse.

c. Gi definisjonen av en symmetrisk matrise. Hvilke av følgende matriser er symmetriske

(i) $A^T A$**,**
(ii) $A + A^T$**,**
(iii) $A - A^T$**? Begrunn svaret.**

En matrise B er symmetrisk dersom $B^T = B$. Siden

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A,$$
$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$
$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T),$$

konkluderer vi at matrisene $A^T A$ og $A + A^T$ er symmetriske, mens matrisen $A - A^T$ ikke er symmetrisk.

d. Regn ut summen av alle elementer på hoveddiagonalen i matrisen $A - A^T$**.**

Elementene på hoveddiagonalen endres ikke under transponering, så har matrisen $A - A^T$ alle elenmentene på hoveddiagonalen lik null. Så, summen av alle elementer på hoveddiagonalen i matrisen $A - A^T$ er lik null.

Professor | Sensorer

Irina Markina | Alexander Lundervold,
Antonella Zanna Munthe Kaas