UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

23. September 2015, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. For hvilke verdier av a, b har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
   (i) ingen løsning?
   (ii) uendelig mange løsninger?
   (iii) én løsning?
2. Regn ut løsningen av systemet når den eksisterer.
3. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ og en basis $\mathcal{B}$ for $\operatorname{Col} A$.
4. For hvilke verdier av a, b er det sant at $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$? Regn ut $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}}$.
5. Regn ut determinaten av matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

Gitt vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og underrommet $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

1. Vis at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for V. Begrunn svaret. Hva er dimensjonen av V?
2. Gitt vektorer $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ slik at

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \end{aligned}$$

   forklar hvorfor $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ er også en basis for V. Finn basisskifte matrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.
3. Gitt at $\mathbf{x}$ er en vektor i V med koordinater $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, regn ut $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$.
4. Sjekk om basisen $\mathcal{B}$ er ortonormal, hvis ikke, ortonormalisér den.

Oppgave 3

1. Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Finn alle egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar? Hvis ja, finn matrisene P og D som diagonaliserer A.
2. Gitt basisen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ for vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad to. La $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være en lineær transformasjon slik at

$$T(1) = x - x^2, \qquad T(x) = 2x - 1, \qquad T(x^2) = 1 - x - 3x^2.$$

   Finn standardmatrisen av T. Regn ut $T(3x-1)$ ved å: i) bruke lineariteten av T og uttrykkene for $T(1), T(x), T(x^2)$; og ii) ved å bruke standardmatrisen. (Tips: hva er koordinatene $[3x-1]_{\mathcal{B}}$?)
3. Hooke's lov sier at lengden L av en streng er en lineær funskjon av kraften F, det vil si $L = a + bF$. Tabellen nede viser et eksperiment der ulike vekt (krefter) er hengt på strengen:

Vekt (F)	2	4	6	8
Lengde (L)	1	1.6	2.1	2.7

   Finn a, b som best passer de eksperimentelle data. Hva representerer a? Hva er den forventet lengden av strengen for $F = 10$?

Oppgave 4

Anta at $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ er to vektorer i $\mathbb{R}^n$ og at de *ikke* er ortogonale. La $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

(a) Forklar hvorfor $\text{rank}A = 1$.

(b) Gitt $\mathbf{w}$ en vektor ortogonal til $\mathbf{v}$. Vis at $\mathbf{w}$ er en egenvektor for A. Hva er egenverdien?

(c) Finn alle egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

(d) Regn ut A^2, A^3, A^4. Finn en formel for A^k og bruk induksjon til å bevise formelen.

Antonella Zanna Munthe-Kaas