UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

26. mai 2015, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

1. For hvilke verdier av a, b har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
   (i) ingen løsning?
   (ii) uendelig mange løsninger?
   (iii) én løsning?
2. Regn ut den generelle løsningen av systemet for a og b som under pkt. (ii).
3. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ når $a = 7$.
4. Finn en basis $\mathcal{B}$ for $\operatorname{Col} A$ når $a = 7$. Finn hvilke verdier av b som gir $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$. Regn ut $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}}$.
5. Regn ut $\det A$ når $a = 0$.

Oppgave 2

Gitt vektorene

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

og underrommet $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$.

1. Er vektorene $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$ lineært uavhengige? Begrunn svaret.
2. Finn en basis $\mathcal{B}$ for W. Hva er dimensjonen av W?

3. Er $\mathbf{u} \in W^{\perp}$?
4. Finn dekomposisjonen $\mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, der $\mathbf{p} = \text{proj}_W \mathbf{u} \in W$ og $\mathbf{v} \in W^{\perp}$.
5. Finn en *ortonormal* basis $\mathcal{C}$ for W.

Oppgave 3

Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Er A inverterbar? I så fall regn ut A^{-1}.
2. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar? Hvis ja, finn matrisene P og D som diagonaliserer A.
3. Betrakt den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$. Finn matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Klassifisér formen og redusér til standardform (uten kryssledd).
4. Finn standardmatrisen til den lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definert slik at $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $T(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $T(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$. Regn ut $T(\mathbf{x})$.
5. Beskriv og tegn et diagonaliseringsdiagram for T. Regn ut $T(\mathbf{x})$ via diagonaliseringen.

Oppgave 4

1. Tabellen nedenfor viser poengsummen y til fotballaget Brann i OBOS-ligaen etter de første 5 rundene i 2015:

Kamp (k)	1	2	3	4	5
Poengsum (y)	1	4	4	5	8

   Bruk en lineær modell, $y(k) = a + bk$, til å finne koeffisientene a, b slik at funksjonen $y(k) = a + bk$ tilpasser best dataene i tabellen (minste kvadraters løsning). Bruk modellen til å forutse poengsummen etter runde 8 og i slutten av sesongen (runde 30).

2. La A være en $n \times n$ matrise med karakteristisk polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Gitt et polynom, $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m$. Da er polynomet $q(A)$ definert som $q(A) = q_0 I + q_1 A + \cdots + q_m A^m$, der I er den $n \times n$ identitetsmatrisen.
   (a) Anta at A er diagonaliserbar, $A = X\Lambda X^{-1}$. Vis at $q(A) = Xq(\Lambda)X^{-1}$.
   (b) Cayley–Hamiltons teorem sier at $p(A) = 0$ for enhver $n \times n$ matrise A (dvs. det karakteristiske polynomet av A evaluert i A er lik null-matrisen). Vis Cayley-Hamiltons teorem i tilfellet der A er diagonaliserbar.
   (c) Anta $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Finn det karakteristiske polynomet av A og benytt Cayley-Hamiltons teorem til å vise at

$$A^{2k} = (-1)^k I, \qquad A^{2k+1} = (-1)^k A,$$

   for $k = 1, 2, \ldots$.

Antonella Zanna Munthe-Kaas **Roman Kozlov**