BOKMÅL

UNIVERSITET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

30. mai 2016, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & & -x_3 & +(a^2-2)x_4 & = & a^2-2a-1. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av a har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning?
2. Regn ut den generelle løsningen av systemet for a som under pkt. (ii).
3. La A være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ for a som under pkt. (ii) .
4. For hvilke verdier av a har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 3? Hva er rangen til A når $a = 0$?
5. Regn ut determinanten til A når $a^2 = 2$.

Oppgave 2

Bektrakt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

1. Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.
2. Gitt vektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{c}_2 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{c}_3 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3, \end{aligned}$$

   finn $\mathcal{B}$-koordinatene til $\mathbf{c}_i$, for $i = 1, 2, 3$.

3. Finn basisskifte matrisen fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$. Gitt en vektor $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$, finn $\mathcal{C}$-koordinatene $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ til $\mathbf{x}$.

4. En lineær transformasjon T er definert som

$$T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \quad T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \quad T(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3.$$

   Finn $[T]_{\mathcal{B}}$ (matrisen til transformasjonen relativ til basisen $\mathcal{B}$). Regn ut $T(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$.

5. Bruk Gram-Schmidt algoritmen til å ortonormalisere basisen $\mathcal{B}$.

Oppgave 3

Gitt den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$.

1. Finn en symmetrisk matrise A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.
2. Regn ut alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen A.
3. Er A diagonaliserbar? Hvis ja, finn matrisene P, D som diagonaliserer A.
4. Klassifisér formen (om den er positiv (semi-)definert, negativ (semi-)definert, ubestemt) og reduser til standardform (uten kryssledd).

Oppgave 4

For å finne effekten av et legemiddel på pasientenes helse, er et eksperiment med 5 pasienter gjennomført. Effekten av en dose x er målt som $y(x)$ i en skala fra 0 (ingen effekt) til 10 (maks effekt). Se tabellen nedenfor.

Dose (x)	0	1	0	2	4
Effekt (y)	3	5	4	7	6

Bruk en lineær modell, $y(x) = a + bx$, til å finne koeffisientene a, b slik at funksjonen $y(x) = a + bx$ tilpasser best dataene i tabellen (minste kvadraters løsning). Ifølge modellen, hva er doseringen x^* som gir best mulig effekt ($y(x^*) = 10$)?

Oppgave 5

En gitt 2×2 matrise A har egenverdi λ med egenvektor $\mathbf{v}_1$ ($A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$). Egenverdien λ har algebraisk multiplisitet 2 og *geometrisk* multiplisitet 1 (dermed A er *ikke* diagonaliserbar).

1. La $\mathbf{v}_2$ være en løsning til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$, dvs $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Vis at $(A - \lambda I)^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.
2. Vis at $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.
3. La $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$. Ved å utnytte at $AV = VT$, finn et uttrykk for T ved å sammenligne kolonnene på begge sider.
4. Det kan vises (du behøver ikke gjøre det) at V er inverterbar, dermed $A = VTV^{-1}$. Matrisen T kalles for *Jordan formen* til matrisen A og $\mathbf{v}_2$ kalles for *generalisert egenvektor* relativ til λ. Finn Jordan formen T og matrisen V for $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Antonella Zanna Munthe-Kaas