BOKMÅL

UNIVERSITET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

29. september 2017, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & +ax_4 & = & b. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av a og b har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning? [4p]
2. Regn ut den generelle løsningen av systemet for $a = 2$ og $b = 1$. [1p]
3. La A være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ når $a = 2$. [1p]
4. For hvilke verdier av a har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 3? Oppgi deretter en basis for $\operatorname{Col} A$. [1p]

Oppgave 2

Betrakt planet W i $\mathbb{R}^3$ definert av ligningen $x - y + 2z = 0$, og vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Vis at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$. [1p]
2. Finn en basis for W og $\dim W$. [1p]
3. Regn ut en ortogonal basis for W. [1p]
4. Regn ut den ortogonale dekomposisjonen $\mathbf{v} = \mathbf{y} + \mathbf{r}$ der $\mathbf{y} = \operatorname{proj}_W(\mathbf{v})$ og $\mathbf{r} \perp W$. [3p]

Oppgave 3

Gitt matrisen $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3]$ og $\operatorname{Col}(C) = \operatorname{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

1. Regn ut determinanten $\det C$ og forklar hvorfor $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ er en basis for $\text{Col}(C)$. [1p]

2. Regn ut $\mathcal{C}$-koordinatene $[\mathbf{v}]_\mathcal{C}$, der vektoren $\mathbf{v}$ er det samme som i Oppgave 2. [1p]

3. Regn ut vektoren som har $\mathcal{C}$-koordinater $[\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}]^T$. [1p]

4. Forklar hvorfor C ikke er *ortogonalt* diagonaliserbar. [1p]

5. Matrisen C er derimot diagonaliserbar. Regn ut egenverdiene og egenvektorene og oppgi en diagonalisering. [6p]

6. La $\mathcal{D}$ være en egenvektorbasis for C. Vi betrakter en transformasjon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definert slik at $T(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$. Gitt at $\mathcal{D}$-koordinatene til en vektor $\mathbf{w}$ er $[\mathbf{w}]_\mathcal{D} = \mathbf{e}_1$, hva er $\mathbf{w}$ og hva er $T(\mathbf{w})$? [2p]

Oppgave 4

Dataene for oppgaven er innhentet fra Yr.no og viser gjennomsnittemperatur for sommersesongen i Norge fra 2012 til 2015, se tabellen nedenfor. Første måling $t = 0$ tilsvarer 2012, $t = 1$ tilsvarer 2013, og så videre. Vi modellerer temperaturen som en funksjon $y(t) = a + bt$ der t er tiden (målt i år).

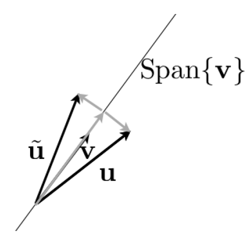
Tid (t)	0	1	2	3
Observert data (y)	9.0	9.8	11.3	8.8

1. Finn normalligningene for problemet. [2p]

2. Finn a, b (minste kvadraters løsning). Bruk disse til å regne ut $y(t)$ for $t = 4$, det vil si til å estimere gjennomsnittemperatur for sommer 2016. [2p]

Oppgave 5[1]

Gitt to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$.



1. Benytt det ortogonale dekomposisjonsteoremet til å finne $\tilde{\mathbf{u}}$, refleksjonen (speiling) av $\mathbf{u}$ med hensyn til linjen $\text{Span}\{\mathbf{v}\}$ (se bildet).

2. Vis at $\tilde{\mathbf{u}} = Q_\mathbf{v}\mathbf{u}$, der $Q_\mathbf{v} = (-I + 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})$.

3. Vis at $Q_\mathbf{v}$ er symmetrisk og ortogonal. ($Q_\mathbf{v}$ kalles *refleksjonsmatrise*).

4. Siden alle egenverdiene og egenvektorene er reelle (i tillegg, man kan finne ortogonale egenvektorer siden $Q_\mathbf{v}$ er symmetrisk), kan du beskrive alle egenverdiene og egenvektorene til $Q_\mathbf{v}$ når $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$? Illustrér med en tegning.

Antonella Zanna Munthe-Kaas

[1]Denne oppgave er valgfri