BOKMÅL

UNIVERSITET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

29. mai 2017, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rrrrcl} & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 & = & b. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av a og b har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning? [4p]
2. Regn ut den generelle løsning av systemet for $a = 3$ og $b = 4$. [1p]
3. La A være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ når $a = 3$. [1p]
4. For hvilke verdier av a har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 3? Finn en basis for $\operatorname{Col} A$ når $a = 0$. [1p]

Oppgave 2

Gitt mengden $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ (underrom av $\mathbb{R}^4$) og vektoren $\mathbf{v}$, der

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Vis at V har dimensjon 3 og finn en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ for V. [1p]
2. Bestem om vektoren $\mathbf{v}$ er i V. I så fall, finn $\mathcal{B}$-koordinatene $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ til $\mathbf{v}$. [1p]
3. Gitt basisen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \end{aligned}$$

   finn basisskiftematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ og regn ut $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$. [2p]

4. Betrakt matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hva er sammenhengen mellom matrisen B og basisskiftematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ i forrige deloppgaven? Hvorfor kan man si at det $B \neq 0$ uten å regne ut? [1p]

5. Regn ut determinanten til B. [1p]

Oppgave 3

1. Gitt matrisen $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, bestem om C er diagonaliserbar (evt. ortogonalt diagonaliserbar) eller ikke. Hvis ja, oppgi diagonaliseringen. [6p]

2. Oppgi den kvadratisk formen $Q_C(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C\mathbf{x}$, med C som ovenfor. Finn en diagonalisering av formen (uten kryssledd) og prinsipalaksene. Bestem formen. [2p]

Oppgave 4

Du har samlet inn eksperimentelle data (se tabellen nedenfor) for en funksjon $y(t) = a + b\sin(\frac{\pi}{2}t) + c\cos(\frac{\pi}{2}t)$, der t er tiden (målt i timer). Ved eksperimentstart (første måling) man setter $t = 0$, deretter måler man y etter $1, 2, 3$ timer.

Tid (t)	0	1	2	3
Observert data (y)	2	1.5	0	-1.5

1. Begrunn hvorfor 1, $\sin(\frac{\pi}{2}t)$ og $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ er lineært uavhengige funskjoner for $t \in \mathbb{R}$. Hva sier det om eksistens og entydighet av minste kvadraters løsning av problemet? [1p]

2. Finn normallikningene for problemet. [3p]

3. Finn a, b, c (minste kvadraters løsning). Bruk disse til å regne ut $y(t)$ for $t = 5$. [2p]

Oppgave 5[1]

En $n \times n$ matrise S sies til å være *skjev-symmetrisk* om $S^T = -S$.

1. Vis at dersom S er skjev-symmetrisk, $\mathbf{x}^T S\mathbf{x} = 0$ for alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$. (Hint: transponér).

2. La $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ være gitt og betrakt den lineære transformasjonen $T_\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definert slik at $T_\mathbf{v}(\mathbf{e_1}) = v_3\mathbf{e_2} - v_2\mathbf{e_3}$, $T_\mathbf{v}(\mathbf{e_2}) = v_1\mathbf{e_3} - v_3\mathbf{e_1}$ og $T_\mathbf{v}(\mathbf{e_3}) = v_2\mathbf{e_1} - v_1\mathbf{e_2}$. Finn standardmatrisen til $T_\mathbf{v}$.

3. Transformasjonen $T_\mathbf{v}$ ovenfor er $T_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$ (vektor produkt i $\mathbb{R}^3$). Bruk standardmatrisen til $T_\mathbf{v}$ til å vise at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{v} \times \mathbf{x}$ er ortogonale. Vis også at $\mathbf{v} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{x}$.

4. Anta at $\mathbf{x}$ er fiksert og at $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ er lineært uavhengige. Hva er $\mathrm{Span}\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}^\perp$?

Antonella Zanna Munthe-Kaas

[1] Denne oppgave er valgfri

1.1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & a-4 & b-4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

i) for $\underline{\underline{a=3}}$, $\underline{\underline{b \neq 4}}$ systemet har ingen løsning (ligning 3 blir $0 = k \neq 0$)

ii) for $\underline{\underline{a \neq 3}}$ (vansett b) eller $a=3$, $b=4$
systemet har ∞-mange løsninger

iii) systemet har $\underline{\underline{\text{aldri}}}$ en entydig løsning siden når det er kompatibel det har alltid fri variabler.

1.2

$a=3$, $b=4$

x_1, x_2 ledende, x_3, x_4 frie

$$x_2 - x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 - x_4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - x_3 + x_4 - 2x_4 = 2 - x_3 - x_4$$

generelle løsning: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-x_3+x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

1.3

$a=3$

$\text{Nul} A = \{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{0} \}$

Den generelle løsning av $A\underline{x} = \underline{0}$ er $\underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

dermed $\text{Nul}\, A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er en basis for Nul A.

$$\underset{\underline{v}_1}{\uparrow} \quad \underset{\underline{v}_2}{\uparrow}$$

1.4 $\text{Rank}(A) = \dim \text{Col}\, A = 3$ for $\underline{\underline{a \neq 3}}$ siden matrisen har 3 pivot kolonner

$\underline{a=0}$: en basis for Col A er $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4\}$ siden disse er pivot kolonner, dvs:

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}}$$

2.1 Man ser at vektorene $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ er de samme som kolonnene til matrisen A som i oppg. 1 for $a=0$.

Siden $a = 0 \neq 3$ vi har at $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ er lin. uavhengige dermed ved å ta $\underline{b}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{b}_2 = \underline{v}_2$ og $\underline{b}_3 = \underline{v}_4$ vi har at $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ er en basis for V (se også 1.4), og $\dim V = 3$.

(N.B. svaret på oppgaven er ikke entydig; $v_3 = v_1 - 2v_2$ så også f. eks $\{v_1, v_3, v_4\}$ er en basis for V)

(2.2) $\underline{v} \in V$. Det er fordi $\underline{v}$ er høyresiden av systemet i oppg. 1 når $b=-2$. For $a=0, b=-2$ systemet har løsning, dermed $\underline{v} \in V$.

Koordinatene: $\underline{v} = r_1 \underline{b_1} + r_2 \underline{b_2} + r_3 \underline{b_3}$ og $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$

disse finnes ved å løse ligningsystemet $[\underline{b_1}\ \underline{b_2}\ \underline{b_3}][\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \underline{v}$

Vi kan gjenbruke rekkereduksjonen fra 1.1 og fjerne 3. kolonne:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Som gir: $r_3 = 2$

$r_2 = -r_3 = -2$

$r_1 = 2 - r_2 - 2r_3 = 2 + 2 - 4 = 0$

dermed: $\underline{\underline{[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}}}$

Dobbeltsjekker:

$$0 \cdot \underline{b_1} - 2 \cdot \underline{b_2} + 2 \cdot \underline{b_3} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \checkmark$$

(2.3)

$\underline{b}_1 = \underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \underline{c}_3$

$\underline{b}_2 = -\underline{c}_3$

$\underline{b}_3 = \underline{c}_2 + \underline{c}_3$

$$\underline{x} = r_1 \underline{b}_1 + r_2 \underline{b}_2 + r_3 \underline{b}_3$$

$$[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = r_1 [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} + r_2 [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} + r_3 [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} = \underbrace{\Big[[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} \; [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \; [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} \Big]}_{\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}} [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$$

$$[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{[\underline{v}]_{\mathcal{C}}}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

(2.4)

$\underline{\underline{B = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}^T}}$. Man kan si at $\det B \neq 0$ siden

$\det B = \det B^T = \det \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} \neq 0$ (determinanten til en basisskifte matrise er <u>alltid</u> $\neq 0$)

(2.5)

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = \underline{\underline{1}}$$

(3.1) Matrisen C er symmetrisk ($C = C^T$) dermed ortogonalt diagonaliserbar.

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) - (-\lambda-1) + (1+\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) + 2(\lambda+1) =$$

$$= (\lambda+1)(-\lambda(\lambda-1)+2) = -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}$ m/ alg. multiplisitet 2

$\underline{\underline{\lambda_2 = 2}}$ " " " 1

Finner egenvektorene:

$\lambda = -1$ $\quad C - \lambda_1 I = C + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_1$ ledende, x_2, x_3 fri

$$x_1 = -x_2 - x_3 \implies \underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gir egenvektorer $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2$ $\quad C - \lambda_2 I = C - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_1, x_2$ ledende, x_3 fri

$x_2 = x_3$

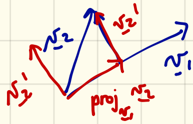
$x_1 = 2x_2 - x_3 = x_3$ $\quad \implies \underline{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

gir egenvektor $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi ser at $\underline{v}_3 \perp \underline{v}_1, \underline{v}_2$ $\quad \left(\underline{v}_3 \perp E_{\lambda_1} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_1 I) \right)$

mens $\underline{v}_2 \not\perp \underline{v}_1$

For å finne en ortogonal diagonalisering, vi bruker Gram-Schmidt på $\underline{v}_1, \underline{v}_2$



$$\underline{v}_2' = \underline{v}_2 - \frac{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} \underline{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1$

$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = 2$

vi ser at $\underline{v}_2' \perp \underline{v}_1$ (og $\underline{v}_3$, ortogonalitet til $\underline{v}_3$ blir ikke ødelagt siden $\underline{v}_3$ ligger i et annet egenrom)

Til slutt, normaliserer:

$$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{v}_2'\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{v}_3\| = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_3] = \underline{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}$$

$$D = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

Vi har at $QQ^T = Q^TQ = I$ (ortogonal matrise)
og at

$$C = QDQ^T$$

er en ortogonal diagonalisering av C.

(3.2) Formen $Q_c(\underline{x}) = \underline{x}^T C \underline{x} = \underline{\underline{2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3}}$.

Siden $C = QDQ^T$ (se 3.1), ved å bruke variabelskifte $\underline{y} = Q^T\underline{x}$, vi får:

$$Q_D(\underline{y}) = \underline{\underline{-y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2}} \quad \text{(formen uten Kryssledd)}$$

Prinsipalaksene er egenvektorene til C:

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$-1 \qquad\qquad -1 \qquad\qquad 2$$

Siden egenverdiene er både positive ($\lambda = 2$) og negative ($\lambda = -1$), formen er <u>ubestemt</u>.

(4.1) $\underset{f_1}{1}, \underset{f_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}, \underset{f_3}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$

$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ er lin uavhengige dersom $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t) = 0$ for alle t

medfører at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Ser på

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + c_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{for } t=0: \\ &\text{for } t=1: \\ &\text{''} \quad t=2: \end{aligned} \begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

dermed funksjonene er lin. uavhengige.

Dette medfører at for $t = 0,1,2,3$ Kolonnene til A i minste kvadraten er lin. uavhengige, dermed problemet har en entydig løsning.

(4.2) $y(t) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + c\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = a f_1(t) + b f_2(t) + c f_3(t)$

$$A = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2) \\ f_1(t_3) & f_2(t_3) & f_3(t_3) \\ f_1(t_4) & f_2(t_4) & f_3(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(merk at Kolonnene til A er ortogonale!)

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

Normale likningene: $A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

gir: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$

(4.3) $\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$ gir $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

for $t = 5$ denne gir: $\underline{\underline{y(5)}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

(5.1) $S^T = -S$

Vi har $\underline{x}^T S \underline{x} = c \in \mathbb{R}$

S skjev-symm.

$$\underbrace{(\underline{x}^T S \underline{x})^T}_{c} = \underline{x}^T S^T \underline{x} = \underline{x}^T (-S) \underline{x} = - \underbrace{\underline{x}^T S \underline{x}}_{c}$$

dermed $c = -c \Rightarrow \underline{\underline{c = 0}}$

(5.2) Standardmatrisen til $T_{\underline{v}}$ er

$$S = \begin{bmatrix} T_{\underline{v}}(\underline{e}_1) & T_{\underline{v}}(\underline{e}_2) & T_{\underline{v}}(\underline{e}_3) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

(5.3) $T_{\underline{v}}(\underline{x}) = \underline{v} \times \underline{x}$ (vektorprodukt i $\mathbb{R}^3$)

$= S\,\underline{x}$

$\underline{x} \cdot (\underline{v} \times \underline{x}) = \underline{x} \cdot (S\underline{x}) = \underline{x}^T S \underline{x} = 0$ siden S skjevs.
(se 5.1)

I tillegg: $\underline{x} \times \underline{v} = T_{\underline{x}}(\underline{v}) = \tilde{S}\,\underline{v}$

der $\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$ (bytt plass mellom $\underline{x}, \underline{v}$ i 5.2)

dermed $\underline{v} \cdot (\underline{v} \times \underline{x}) \underset{\underline{v}\times\underline{x} = -\underline{x}\times\underline{v}}{=} \underline{v} \cdot (-\underline{x} \times \underline{v}) = -\underline{v}^T \tilde{S}\, \underline{v} = 0$

siden også $\tilde{S}$ skjev-symm.

(5.4) Vi har funnet at $\underline{v} \times \underline{x} \perp \underline{x}, \underline{v}$

Siden $\underline{x}, \underline{v}$ er lin. uavhengige,

$\dim \operatorname{Span}\{\underline{x}, \underline{v}\} = 2$

Vi har funnet at $\underline{v} \times \underline{x} \perp \underline{x}, \underline{v}$, dermed

$\operatorname{Span}\{\underline{x}, \underline{v}\}^{\perp} = \underline{\operatorname{Span}\{\underline{v} \times \underline{x}\}} = \{\alpha(\underline{v} \times \underline{x}),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.