i Introtekst MAT121 H18

Eksam MAT121 - Lineær algebra, H 2018

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.

Svar gjerne med tekst i bokser der det er svarboks og vedlegg ark for mellomregning der det skulle være nødvendig.
Alle svar må begrunnes slik at fremgangsmåten for besvarelsen er tydelig.

Oppgaver 1-6 gir tilsammen 38 poeng som tilsvarer 100% skår.
Bevisoppgave 7 er frivillig og gir ekstra poeng.

1 MAT121H18 Ligningssystemer, eksistens og entydighet

Betrakt ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$$

1. Regn ut trappeformen til den augmentert matrise $[A \mid \mathbf{b}]$ (1p)
2. For hvilke verdier av parametrene a, b har systemet: (3p)

- ingen løsning
- uendelig mange løsninger
- éntydig løsning

3. Finn den generelle løsning av systemet for verdiene av a, b som gir uendelig mange løsninger. (1p)

Skriv ditt svar her eller bruk vedlegg

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 5

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

2 MAT121H18 Nulrom, Kolonnerom

Matrisen A er det samme som i forrige oppgave:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

1. For hvilke verdi av a er Nul $A \neq \{\mathbf{0}\}$? Finn deretter en basis og oppgi dimensjonen. (2p)
2. Hva er rank A når $a = -1$? Oppgi en basis for kolonnerommet Col A (2p)
3. Regn ut det A når $a = -1$ og $a = 0$ (2p)

Skriv ditt svar her eller bruk vedlegg

Format B I U x₂ x² Tx

Words: 0

Maks poeng: 6

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

3 MAT121H18 Basis, basissskifte, ortogonalisering

Betrakt underromet V, med basiser $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ og $\mathcal{C} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}\}$.

1. Gitt at
$$\mathbf{c_1} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$$
$$\mathbf{c_2} = \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$$
$$\mathbf{c_3} = \mathbf{b_3}$$
finn basisskiftmatrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ fra $\mathcal{C}$ basisen til $\mathcal{B}$ basisen. (2p)
2. Finn deretter basisskiftmatrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra $\mathcal{B}$ basisen til $\mathcal{C}$ basisen. (2p)
3. Gitt vectoren $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 + 2\,\mathbf{c}_2$,finn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$-koordinatene til vektoren $\mathbf{x}$). (1p)
4. Regn ut $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$-koordinatene til vektoren $\mathbf{x}$). (1p)
5. Bruk Gram-Schmidt på $\mathcal{B}$ til å regne ut en ortonormal basis for V dersom

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(2p)

Skriv ditt svar her

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 8

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

4

MAT121H18 Egenverdier, egenvektorer

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Uten å regne ut egenverdier og egenvektorer, forklar hvorfor er A singulær. (1p)
2. Regn ut det karakteristiske polynomet til A (1p)
3. Regn ut alle egenverdiene til A (2p)
4. Regn ut alle egenvektorer av A. (3p)
5. Er matrisen diagonaliserbar eller ei? Hvis ja, oppgi en diagonalisering $A = PDP^{-1}$. (1p)

Skriv ditt svar her

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ ABC

Words: 0

Maks poeng: 8

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

5 MAt121H18 Transformasjoner

1. Hva betyr at en transformasjonen mellom to vektorrom er lineær? (1p)
2. Videre i oppgaven, vi betrakter transformasjonen
$$T : \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{bmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
Vis at transformasjonen er lineær. (1p)
3. Oppgi standardmatrisen til transformasjonen. (1p)
4. Argumenter hvorfor transformasjonen er inverterbar. Finn standardmatrisen til T^{-1}. Hvilket relasjon er mellom T og T^{-1}? (2p)

Skriv ditt svar her eller bruk vedlegg

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 5

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

6

MAT121H18 Minste kvadrater

Gitt vektorene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, betrakt planen $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, derimot, tilhører ikke planen W.

Bruk minstekvadraters metoden til å finne vektoren $\widehat{\mathbf{x}} \in W$ som har kortest avstand fra $\mathbf{x}$. (6p)

Skriv ditt svar her

Format

Words: 0

Maks poeng: 6

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

7 Bevisoppgave: Companion matrices

Betrakt matrisen

$$C_n = \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Regn ut det karakteristisk polynomet for $n = 2$ og $n = 3$
2. Oppgi en generelle formel for det karakteristiske polynomet for hvilkårlige n (Hint: bruk induksjon).
3. Oppgi en matrise av type C_n slik at egenverdiene til matrisen er røttene til polynomet $p(x) = 3 - 2x + x^3 - 4x^4$

Fakta: Matrisen C_n kalles *companion matrix*,og metoden beskrevet ovenfor er en mulig metode for å regne ut alle røttene til et polynom: man konstruerer C_n og regner ut egenverdiene. Denne fremgangsmåten er brukt av programmvaret Matlab når man tilkaller funksjonen "roots" (som brukes til å regne ut røtter av polynomer).

Skriv ditt svar her

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ ABC

Words: 0

Maks poeng: 5

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX