ℹ Introtekst MAT121 H18

Eksam MAT121 - Lineær algebra, H 2018

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetes reglar.

Svar gjerne med tekst i boksar der det er svarboks og vedlegg ark for mellomrekning der det skulle vera naudsynt.

Alle svar skal grunngjevast. Det må vere med så mykje mellomrekning at fremgangsmåten fremgår tydeleg av svaret.

Oppgåver 1-6 gjev tilsaman 38 poeng som tilsvarer 100% skår.
Bevisoppgåve 7 er frivillig og gjev ekstra poeng.

1 MAT121H18 Ligningssystemer, eksistens og entydighet

Vurder ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$$

1. Rekn ut trappeformen til den augmentert matrise $[A \mid \mathbf{b}]$ (1p)
2. Kva for verdiar av parametrane a, b har systemet: (3p)

- ingen løysning
- uendeleg mange løysningar
- éntydig løysning

3. Finn den generelle løysninga av systemet for verdiane av a, b som gjev uendeleg mange løysninga. (1p)

Skriv svaret ditt her...

Format

1) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-4 \end{array}\right] \sim$

$R_2 \to R_2 - R_1$
$R_3 \to R_3 - R_1$

$R_2 \to R_2/(-2)$
$R_3 \to R_3 + R_2$
$R_4 \to R_4 - R_2$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-4 \end{array}\right]$

$R_3 \to R_3/(-2)$

2) • ingen løsning: $a=1, b\neq 4$ siste rekke blir av type $0=k$, $k\neq 0$

• Uendelig mange løsning: $a=1, b=4$ siste ligning er $0=0$ og vi har en fri variabel

Words: 0

• entydig løsning: $a\neq 1$: alle kolonner er pivot kolonner.

Maks poeng: 5

3) $a=1, b=4$: x_1, x_2, x_3 ledende, x_4 fri:

$x_3 = 2$
$x_2 + x_4 = 4 \to x_2 = 4 - x_4$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \to x_1 = 10 - x_2 - x_3 - x_4$
$= 10 - 4 + x_4 - 2 - x_4$
$= 4$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 - x_4 \\ 2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 MAT121H18 Nulrom, Kolonnerom

Matrisen A er det same som i førre oppgåve:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

1. Kva for verdi av a er Nul $A \neq \{\mathbf{0}\}$? Finn deretter ein basis og oppgje dimensjonen. (2p)
2. Kva er rank A når $a = -1$? Oppgje ein basis for kolonnerommet Col A (2p)
3. Rekn ut det A når $a = -1$ og $a = 0$ (2p)

Skriv svaret ditt her...

Format

$A\underline{x} = \underline{0}$. Nul $A = \{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{0} \}$

1) Nul $A \neq \{\underline{0}\}$ for $\underline{\underline{a = 1}}$. (se 1.3)

basis: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Dim Nul $A = 1$ (1 basis vektor).

2) $a = -1$: da er rank $A = 4$ siden alle Kolonner er pivotKolonner.

basis: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

N.B. siden Col $A = \mathbb{R}^4$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ er også en basis for Col A (basiser er ikke <u>entydige!</u>)

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$R_2 \to R_2 + R_1$

$= -a(-4) + (-4) = 4a - 4$.

$a = -1$: $\underline{\underline{\det A = -8}}$

Words: 0

$a = 0$ $\underline{\underline{\det A = -4}}$

N.B. vi ser at for $a = 1$ $\det A = 0$, som vi forventet fra oppg 1.

Maks poeng: 6

3 MAT121H18 Basis, basissskifte, ortogonalisering

Vurder underrommet V med basiser $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ og $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

1. Gjeve at

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$$
$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$$
$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_3$$

finn basisskiftmatrisa $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ fra $\mathcal{C}$ basisen til $\mathcal{B}$ basisen. (2p)

2. Finn deretter basisskiftmatrisa $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra $\mathcal{B}$ basisen til $\mathcal{C}$ basisen. (2p)

3. Gjeve vectoren $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 + 2\,\mathbf{c}_2$, finn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$-koordinatene til vektoren $\mathbf{x}$). (1p)

4. Rekn ut $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$-koordinatene til vektoren $\mathbf{x}$). (1p)

5. Nytt Gram-Schmidt på $\mathcal{B}$ til å rekne ut ein ortonormal basis for V dersom

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

(2p)

1) $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \left[[c_1]_{\mathcal{B}}, [c_2]_{\mathcal{B}}, [c_3]_{\mathcal{B}}\right] = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ Siden $[c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $[c_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $[c_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

2) $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}^{-1}$. Man kan henten invertere matrisen i oppg 1 eller uttrykke vektorene b_1, b_2, b_3 ut fra c_1, c_2, c_3. Velger det siste.

$b_3 = c_3$

$b_2 = c_2 - b_3 = c_2 - c_3$

$b_1 = c_1 - b_2 - b_3 = c_1 - c_2 + c_3 - c_3 = c_1 - c_2$

$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left[[b_1]_{\mathcal{C}}, [b_2]_{\mathcal{C}}, [b_3]_{\mathcal{C}}\right] = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ siden $[b_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $[b_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $[b_3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

3) $x = c_1 + 2c_2 \rightarrow [x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

4) Vi kan regne $[x]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}[x]_{\mathcal{C}}$ ved å bruke basisskiftematrisen

alt. $x = c_1 + 2c_2 = \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3)}_{c_1} + 2\underbrace{(b_2 + b_3)}_{c_2} = b_1 + 3b_2 + 3b_3 \Rightarrow [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{b_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\underline{v_1} \cdot \underline{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1+4 = 5$$

$$\underline{v_1} \cdot \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1+4 = 5$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$- \frac{\underline{v_2} \cdot \underline{b_3}}{\underline{v_2} \cdot \underline{v_2}} \underline{v_2}$$

$$\underline{v_1} \cdot \underline{b_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 5$$

$$\underline{v_2} \cdot \underline{b_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1+2 = 3$$

$$\underline{v_2} \cdot \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\Big] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u_2} = \frac{1}{\|\underline{v_2}\|} \underline{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{u_3} = \frac{1}{\|\underline{v_3}\|} \underline{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big\}$$

4 MAT121H18 Egenverdier, egenvektorer

Gjeve matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Utan å rekne ut egenverdier og egenvektorer, forklar kvifor er A singulær. (1p)
2. Rekn ut det karakteristiske polynomet til A (1p)
3. Rekn ut alle egenverdiene til A (2p)
4. Rekn ut alle egenvektorer av A. (3p)
5. Er matrisen diagonaliserbar eller ei? Viss ja, oppgje ein diagonalisering $A = PDP^{-1}$. (1p)

Skriv svaret ditt her...

Format

1) Rekke 1 = Rekke 3, dermed rank $A < 3$ og matrisen er singulær.
(andre svar er mulige).

2) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - (1-\lambda-1)$

$= -\lambda(1-\lambda)^2 - (-\lambda) = -\lambda\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$

3) $p(\lambda) = 0$:

$\lambda\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \implies \begin{cases} \underline{\lambda = 0} \\ (1-\lambda)^2 = 1 \quad \lambda - 1 = \pm 1 \implies \underline{\underline{\lambda = +2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\underline{\lambda = 0}} \end{cases}$

Words: 0

$\underline{\underline{\lambda = 0}}$ eig. med alg. multiplisitet 2

$\underline{\underline{\lambda = +2}}$ eig. " " " 1

4) Utrekning av egenvektorene: $(A-\lambda I)\underline{v} = \underline{0}$

$\underline{\lambda = 2}$: $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 + R_1$

x_3 fri, x_2, x_1 bundne

$x_2 = x_3$

$x_1 = x_2 = x_3$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$\underline{\lambda = 0}$ $A - 0I = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_1$

x_3 fri, x_1, x_2 bundne

$x_2 = -x_3$

$x_1 = -x_2 = x_3$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Vi ser at det er ikke flere egenvektorer assosiert til $\lambda = 0$ dermed $\lambda = 0$ har geometrisk multiplisitet 1. $(\dim \mathrm{Nul}\, E_{\lambda=0} = 1)$

5) Matrisen er $\underline{\underline{\text{ikke diagonaliserbar}}}$ i det det er ikke nok lin. uavh. egenvektorer.

5 MAt121H18 Transformasjoner

1. Kva betyr at ein transformasjonen mellom to vektorrom er lineær? (1p)
2. Vidare i oppgåva, vi vurderer transformasjonen
$$T:\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mapsto\begin{bmatrix}v_3\\v_1\\v_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$
3. Vis at transformasjonen er lineær. (1p)
4. Oppgje standardmatrisen til transformasjonen. (1p)
5. Argument kvifor transformasjonen er inverterbar. Finn standardmatrisen til T^{-1}. Kva for ein relasjon er mellom T og T^{-1}? (2p)

Skriv svaret ditt her...

Format

V, W vektorrom

1) $T: V \to W$ er lineær dersom: $T(\alpha \underline{v_1}+\beta \underline{v_2}) = \alpha T(\underline{v_1}) + \beta T(\underline{v_2})$ $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) $\forall \underline{v_1}, \underline{v_2}\in V$

2-3) $T\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}v_3\\v_1\\v_2\end{bmatrix}$

$\underline{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$, $\underline{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$, $\underline{u},\underline{v}\in V$. La $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}=\begin{bmatrix}\alpha u_1+\beta v_1\\\alpha u_2+\beta v_2\\\alpha u_3+\beta v_3\end{bmatrix}$. $\underline{\underline{T(\alpha\underline{u}+\beta\underline{v})}}=\begin{bmatrix}\alpha u_3+\beta v_3\\\alpha u_1+\beta v_1\\\alpha u_2+\beta v_2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}u_3\\u_1\\u_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}v_3\\v_1\\v_2\end{bmatrix}=\underline{\underline{\alpha T(\underline{u})+\beta T(\underline{v})}}$

4) $\underline{v}=v_1\underline{e}_1+v_2\underline{e}_2+v_3\underline{e}_3$. $T(\underline{e}_1)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $T(\underline{e}_2)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $T(\underline{e}_3)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

Words: 0

standarmatrisen er $T=\left[T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2), T(\underline{e}_3)\right]=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

4) Vi ser at $S: \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_1 \end{bmatrix}$ er slik at $S\left(\begin{bmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

dermed $S = T^{-1}$

Standardmatrisen er $T^{-1} = S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\underline{e}_1) & S(\underline{e}_2) & S(\underline{e}_3) \end{bmatrix}$

Relasjonen mellom T og T^{-1} er at $T^{-1} = T^T$

(T er et eksempel av en permutasjon matrise).

Maks poeng: 5

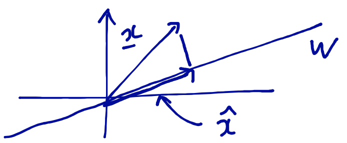
6 MAT121H18 Minste kvadrater

Gjeve vektorene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, vurder planen $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$
, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, derimot, tilhøyrer ikkje planen W.

Bruk minstekvadraters metoden til å finna vektoren $\hat{\mathbf{x}} \in W$
som har kortast avstand frå $\mathbf{x}$. (6p)



$\hat{x} \in W = \mathrm{Span}\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} \iff \hat{x} = x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2$ der x_1, x_2 er Koord. til $\underline{x}$ i basisen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$

for at $\hat{x}$ skal ha kortest avstand fra W vi må kreve at residualen

$\underline{r} = \underline{x} - A\hat{\underline{x}}$ er minimert, der $A = [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$

Dermed det er en minste kvadraters problem,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$(A\hat{x} = \underline{x})$. Normale ligen. $A^*A\hat{x} = A^*\underline{x}$

$A^*A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $A^*\underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$

$x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \hat{x} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$ //

Skriv svaret ditt her...

Format

N.B. Se oppg. 3, der $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ er en ortonormal basis for W.

Sett $U = [\underline{u}_1, \underline{u}_2]$

Da er $\hat{\underline{x}} = P\underline{x}$ der $P = UU^*$ den ortogonale projektoren på W.

$$P = UU^* = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 2/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

som selvfølgelig stemmer med svaret som vi regnet i stad.

Words: 0

Maks poeng: 6

7 Bevisoppgave: Companion matrices

Vurder matrisen

$$C_n = \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Rekn ut det karakteristisk polynomet for $n = 2$ og $n = 3$
2. Oppgje ein generelle formel for det karakteristiske polynomet for hvilkårlige n (Hint: nytt induksjon).

3. Oppgje ein matrise av type C_n slik at egenverdiene til matrisen er røtene til polynomet
$p(x) = 3 - 2x + x^3 - 4x^4$

Faktum: Matrisen C_n vert kalla *companion matrix*, og metoden skildra ovanfor er ein mogleg metode for å rekna ut alle røtene til eit polynom: ein konstruerer C_n og reknar ut egenverdiene. Denne fremgangsmåten er brukt av programmvaret Matlab når ein tilkallar funksjonen "roots" (som vert brukt til å rekna ut røter av polynom).

Skriv svaret ditt her...

Format

$$C_2 = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |C_2 - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} -a_2-\lambda & -a_1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = -\lambda(-a_2-\lambda) + a_1 =$$
$$= \lambda^2 + a_2\lambda + a_1$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |C_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a_3-\lambda & -a_2 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} a_3-\lambda & -a_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-a_1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{= 1}$$

$$= (-\lambda)^2(a_3 - \lambda) - \lambda(a_2) - a_1$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 a_3 - \lambda a_2 - a_1 = -(\lambda^3 + \lambda^2 a_3 + \lambda a_2 + a_1)$$

Ansatz: $(\det C_n - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + \lambda^{n-1}a_n + \lambda^{n-2}a_{n-1} + \dots + \lambda a_2 + a_1)$

Words: 0

Sant for $n=2$.

Anta sant for n, vis for $n+1$

Maks poeng: 5

$$|C_{n+1} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a_{n+1}-\lambda & -a_n & \cdots & -a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\; 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{bruker} \\ \text{siste kolonne}}}{=} -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} a_{n+1}-\lambda & -a_n & \cdots & -a_2 \\ 1 & -\lambda & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \vdots \\ \vdots & & 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{n \times n \text{ Comp.}} + (-1)^{(n+1)+1}(-a_1) \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}}^{= 1}$$

$$= (-\lambda)(-1)^n(\lambda^n + \lambda^{n-1}a_{n+1} + \dots + \lambda a_3 + a_2) + (-1)^{n+1}a_1$$

$$= (-1)^{n+1}(\lambda^{n+1} + \lambda^n a_{n+1} + \dots + \lambda^2 a_3 + \lambda a_2 + a_1) \quad \text{QED.}$$

3) $p(x) = 3 - 2x + x^3 - 4x^4$

merk at polynomene til C_n har høyeste ledd med Koeff 1.

Så vi betrakter: $\tilde{p}(x) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + 0x^2 - \frac{1}{4}x^3 + x^4$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$