BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet M102 - Lineær algebra

Mandag 30. november 1998, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator av samme type som godkjent i den videregående skolen.

Oppgave 1

M er matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Finn den reduserte trappeformen til M.

b) Finn en basis for rekkerommet til M, og angi dimensjonen til dette.

c) Hva er dimensjonen til M's søylerom? Angi en basis for dette.

d) Finn en basis for nullrommet til M.

Oppgave 2

Gitt ligningssystemet S

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a) Hvilken dimensjon har løsningsrommet L?

b) Undersøk om vektoren $(1, -1, 2, 1)$ er i rekkerommet R for koeffisient-matrisen til S, eller i L.

c) Finn en basis og en ortogonal basis for L.

d) Hvilke vektorer er i både L og R?

e) Vis at når $\{\vec{l_1}, \vec{l_2}\}$ er en basis for L og $\{\vec{r_1}, \vec{r_2}\}$ er en basis for R, så vil disse vektorene samlet utgjøre en basis for R^4.

Oppgave 3

a) En 3 x 3 matrise M har egenverdiene 0, -1 og 1. Hvilken sats i boken viser at M er diagonaliserbar?

b) Vis at matrisen $M_{a,b}$

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix},$$

der a og b er gitte reelle tall, ikke er invertibel.

c) For hvilke tallpar (a, b) er $M_{a,b}$ ortogonalt diagonaliserbar?

d) Vis at $M_{a,b}$ er diagonaliserbar når a og b er positive .

Oppgave 4

a) Definer begrepet ortogonal matrise.

b) Vis at når A er en ortogonal matrise, vil også A^T og A^{-1} være ortogonale. Vis at hvis B er en ortogonal matrise av samme orden som A vil også AB være ortogonal.

c) Kjeglesnittet K har ligningen (m.h.p. standardbasisen for R^2)

$$7x_1^2 + 6\sqrt{3}\,x_1x_2 + 13x_2^2 = 256\,.$$

Finn en ortonormal basis B for R^2 som er slik at K's ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten produktledd ("cross-product term"). Hva slags kjeglesnitt blir K ?

d) Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

e) Til basisen B i c) svarer det en matrise P , der søylevektorene er koordinatvektorene (m.h.p. standardbasisen) til vektorene i B. Vis at for et passe valg av B vil $P + P^T = I_2$. Finn så alle løsninger av ligningen

$$X + Y = I_2$$

der X og Y skal være ortogonalmatriser. Vis at hver 2×2 ortogonalmatrise kan skrives som en sum av to ortogonalmatriser.

Helge Tverberg　　　　　　Hans Brodersen