BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet M102 - Lineær algebra
Fredag 15. mai 1998, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator av samme type som godkjent i Den Videregående Skolen.

Oppgave 1

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & u & = & 10 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & u & = & 7 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & - & u & = & 8 \\ x & - & y & + & z & - & u & = & 2 \end{array}$$

b) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & u & = & 10 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & u & = & 7 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & - & u & = & 8 \\ x & - & y & + & z & - & au & = & b \end{array}$$

For hvilke verdier av a og b har systemet
i) En entydig løsning?
ii) Uendelig mange løsninger?
iii) Ingen løsning?

c) Formuler Cramers Teorem. Bevis dette resultatet dersom totalmatrisen er på redusert trappeform.

Oppgave 2

a) Hva vil det si at en $n \times n$ – matrise A er diagonaliserbar? Hva vil det si at A er ortogonalt diagonaliserbar?

b) Finn alle egenverdier til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn de tilhørende egenrommene, og avgjør om matrisen er diagonaliserbar.

c) La

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vis at denne matrisen er ortogonalt diagonaliserbar. Finn matrisens egenverdier, og finn en ortogonal matrise som diagonaliserer den.

Oppgave 3

a) Forklar hvilke typer kjeglesnitt som finnes, og gi en generell ligning for hver type som er på standard form. Tegn figurer.

b) Et kjeglesnitt har ligningen

$$x^2 + y^2 + 6xy - x + y = \frac{10}{8},$$

der (x, y) er koordinatene med hensyn på standardbasisen i $\mathbb{R}^2$. Finn et nytt koordinatsystem med koordinater (x', y') slik at kjeglesnittet kommer på standard form i forhold til dette. Skisser kjeglesnittet, og tegn inn de nye koordinataksene. Angi den tilhørende ortonormale basisen for $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 4

a) La $\underline{u}_1 = (1,1,0,0), \underline{u}_2 = (0,1,1,0), \underline{u}_3 = (0,0,1,1), \underline{u}_4 = (0,0,0,1)$. Vis at dette er en basis for $\mathbb{R}^4$. Regn ut overgangsmatrisen fra koordinater med hensyn på standardbasisen til koordinater med hensyn på denne nye basisen.

b) La U være det lineære underrommet utspent av vektorene $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ og $\underline{u}_3$ fra punkt a). Bruk Gram-Schmidt prosedyren til å finne en ortonormal basis for U.

c) La $T : V \longrightarrow W$ være en lineær transformasjon fra et vektorrom V som er av dimensjon n til et vektorrom W som er av dimensjon m. Definer rangen og nulliteten til T, og skriv opp en relasjon mellom dem.

d) En lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ x_2 + x_4 - x_5 \\ x_1 + x_3 + x_5 \end{bmatrix}$$

Finn standardmatrisen til T.

e) Finn nullrommet og rekkevidden til T, og regn ut rangen og nulliteten til T.

f) Finn matrisen for T med hensyn på standardbasisen for $\mathbb{R}^5$ og basisen for $\mathbb{R}^4$ gitt i punkt a).

Audun Holme — Hans Brodersen