Velkommen til eksamen i MAT212.

Eksamen er delt opp i tre deler.

I del 1 blir det hovedsakelig spørsmål om definisjoner og begrepsforståelse. Her gies det to poeng per oppgave, og det er totalt mulig å oppnå 16 poeng. Det anbefales å disponere 45 minutter til denne delen av eksamen.

I del 2 blir det hovedsakelig spørsmål om kunnskap til og enkel bruk av hovedteoremene i kurset. Her gies det tre poeng per oppgave, og det er totalt mulig å oppnå 30 poeng. Det anbefales å disponere 90 minutter til denne delen av eksamen.

I del 3 blir det spørsmål som krever at dere bruker kursets innhold i utregninger. Her gies det 5 eller 10 poeng per oppgave, og det er totalt mulig å oppnå 40 poeng. Det anbefales å disponere 120 minutter til denne delen av eksamen.

Totalt kan dere altså oppnå 86 poeng på eksamen.

Når det er anledning til å huke av på flere svaralternativ, vil gale svar som regel gi like mange minus-poeng som riktige svar gir pluss-poeng, med noen justeringer for hvor mange svaralternativ er riktig (dette kan vi naturlig nok ikke informere om i oppgaven). Eksempel: I del 2 av oppgaven er det mulig å få tre poeng per oppgave. Hvis to av fem svar er riktig, får dere da to poeng per riktig svar, med fratrekk av to poeng per galt svar. Det likevel ikke mulig å få negativ poeng på noen oppgave, slik at minimumspoengsummen for alle oppgaver er satt til null poeng.

Lykke til!

Jan M. Nordbotten

1 For en kurve $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbb{R}^3$, parametrisert på intervallet $I = [a, b]$. Hva representerer veibuelengden $s(t)$?

Velg ett alternativ

- Avstanden mellom punktene $\mathbf{r}\,(a)$ og $\mathbf{r}\,(t)$
- Lengden langs kurven fra $\mathbf{r}\,(a)$ fram til $\mathbf{r}\,(t)$
- Lengden av kurven fra startpunktet $\mathbf{r}\,(a)$ til sluttpunktet $\mathbf{r}(b)$

2 For et rektangulært integrasjonsmråde $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ og intergrerbar $f(x, y)$. Når er $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$?

Velg ett alternativ

- Når $f(x, y)$ er C^2
- Aldri, verdien vil avhenge av integrasjonsrekkefølge
- Alltid
- Når funksjonen er konstant i den ene variabelen (f.eks. avhenger bare av x)

3 Huk av de egenskapene gradientvektoren ∇f i punktet $\mathbf{a}$ oppfyller

Velg ett eller flere alternativer

- Står normalt på nivåmengden til f gjennom punktet $\mathbf{a}$
- Er tangent til nivåmengden til f gjennom punktet $\mathbf{a}$
- Peker i retningen for raskest økning i funksjonsverdier
- Peker i retningen for raskest avtagning i funksjonsverdier
- Tilfredsstiller relasjonen $\mathbf{b} \cdot \nabla f = |\frac{df}{d\mathbf{b}}|$ for alle vektorer $\mathbf{b}$

4 For en vilkårleg funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, er de to partiellderiverte $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ og $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ like?

Velg ett eller flere alternativer

- Ja, hvis funksjonen er C^3
- Nei
- Ja, hvis de partiellderiverte av tredje orden eksisterer
- Ja, hvis de partiellderiverte av tredje orden er kontinuerlege

5 Hvor mange mulige orienteringer kan en kurve ha?

Velg ett alternativ

- To
- Uendeleg
- En
- Det kommer an på om kurven er lukket eller ikke

6 Hvis $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\hat{\mathbf{i}} + F_2(x,y)\hat{\mathbf{j}}$ er konservativt og C^1, hva vet du da om de deriverte til $F_1(x,y)$ og $F_2(x,y)$?

Velg ett alternativ

- $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$
- $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$
- $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}$

7 For et vektorfelt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, huk av på de utsagnene som er sanne:

Velg ett eller flere alternativer

- Divergens kan fysisk tolkes som hvor raskt et hastighetsfelt "samler seg".
- For et kartesisk koordinatsystem kan divergense skrives som summen av de partiellderiverte, altså $\nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$
- Hvis divergensen av et vektorfelt er null, kalles det inkompressibelt.
- Divergens kan skrives som den retningsderiverte av et vektorfelt i sammenfallende retning til vektorene, altså $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}}{d|\mathbf{f}|}$
- I polarkoordinater (ρ, θ) er formelen for divergens $\nabla \cdot \mathbf{f}(\rho,\theta) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \rho \frac{\partial}{\partial \theta}(f_\theta)$

8 For et vektorfelt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, og gitt følgende formel for krøllen (curl):

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial x_b} - \frac{\partial f_b}{\partial x_a} \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_e} - \frac{\partial f_e}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_g}{\partial x_h} - \frac{\partial f_h}{\partial x_g} \end{pmatrix}$$

Gi riktig verdi på de to første parametrene: $a =$ ___, $b =$ ___

9 Hva vet vi om feilen $R_1\left(\mathbf{x};\mathbf{a}\right)$ som oppstår når funksjonen $f\left(\mathbf{x}\right):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ er tilnærmet med et førsteordens Taylorpolynom rundt punktet $\mathbf{a}$? Funksjonen er C^1.

Velg ett eller flere alternativer

- Feilen går mot 0 når $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$, slik at $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{R_1(\mathbf{x},\mathbf{a})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}=0$
- Feilen er gitt ved $R_1\left(\mathbf{x},\mathbf{a}\right)=\frac{\left((\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\nabla\right)^2 f(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}))}{2}$ hvor θ er mellom 0 og 1.
- Feilen går mot 0 når $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$, men vi vet ingenting om raten

10 For en C^2 funksjon $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$; hvilke utsagn stemmer om Hesse-matrisa?

Velg ett eller flere alternativer

- Nyttig hvis man skal regne ut et Taylorpolynom av andre orden
- Den er symmetrisk
- Kan alltid regnes ut eksplisitt
- Den er positivt definitt

11

Hva kreves av C^1-funksjonen $F(x,y)$ for at likningen $F(x,y)=0$ implisitt skal definere y som en funksjon av x nær $x=1$?

Velg ett alternativ

- At $F\left(x,y\right)$ alltid har en veldefinert gradientvektor
- At $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ og at det eksisterer minst én verdi y slik at $F(1,y)=0$
- At $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$ og at det eksisterer nøyaktig én verdi y slik at at $F(1,y)=0$
- At $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$ og $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$

12 Gitt likningen $F(x,y)=0$, som definerer x som en implisitt funksjon av y. Finn $\frac{dx}{dy}$ i punktet (a,b)

Velg ett alternativ

- $\frac{dx}{dy}\big|_{y=b} = -\big(\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(a,b)}\big)\big(\frac{\partial F}{\partial y}\big|_{(a,b)}\big)^{-1}$
- $\frac{dx}{dy}\big|_{y=b} = -\big(\frac{\partial F}{\partial y}\big|_{(a,b)}\big)\big(\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(a,b)}\big)^{-1}$
- $\frac{dx}{dy}\big|_{y=b} = \big(\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(a,b)}\big)\big(\frac{\partial F}{\partial y}\big|_{(a,b)}\big)^{-1}$
- $\frac{dx}{dy}\big|_{y=b} = \big(\frac{\partial F}{\partial y}\big|_{(a,b)}\big)\big(\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(a,b)}\big)^{-1}$

13 Hvis flaten som er gitt implisitt ved $G(x,y,z)=0$ har en en-til-en projeksjon i xz-planet, hva er da det orienterte arealelementet $d\mathbf{S}=\hat{\mathbf{N}}dS$?

Velg ett alternativ

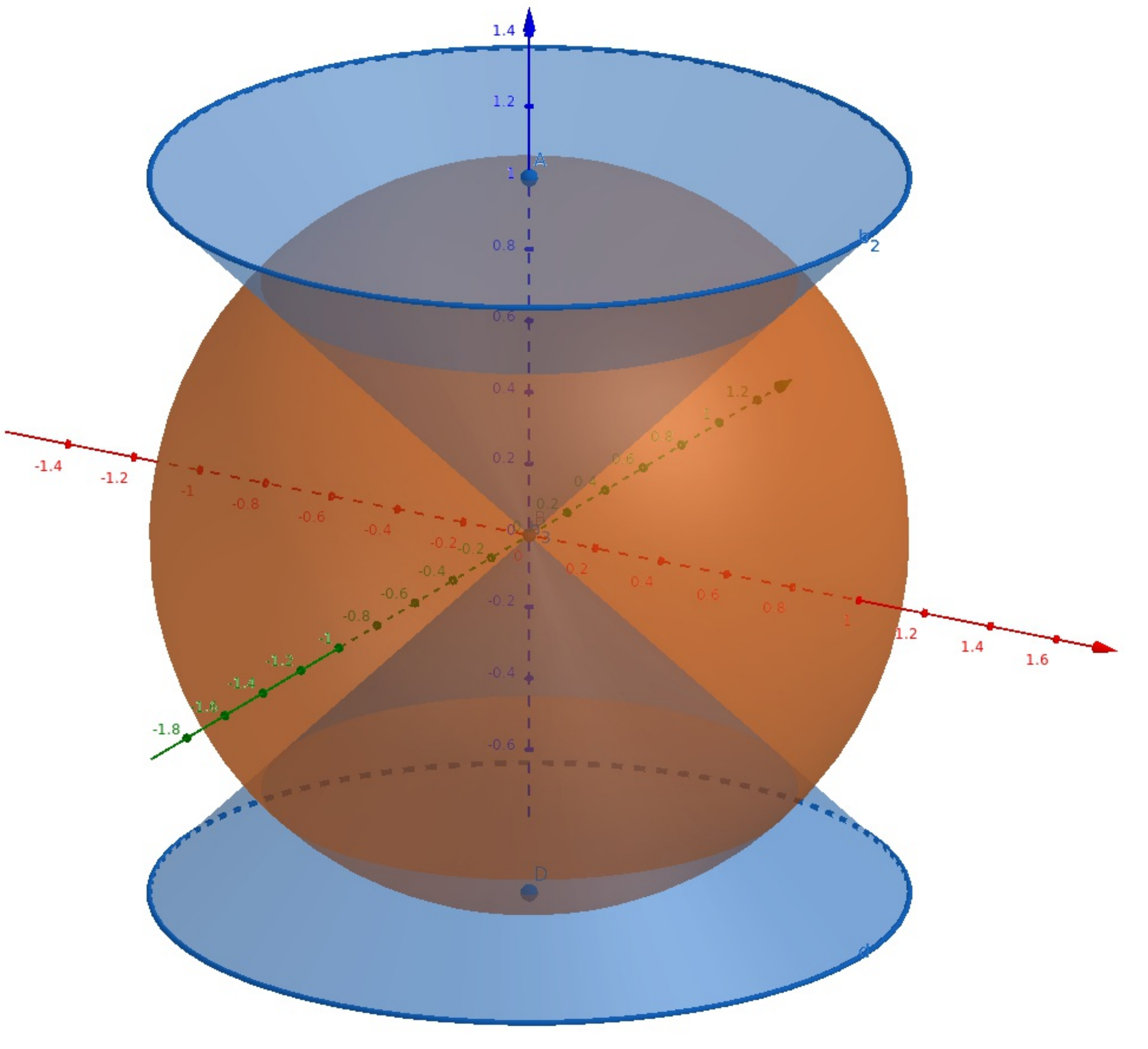
- $\pm\frac{\nabla G}{\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)}dxdz$
- $\pm\frac{\nabla G}{|\nabla G|}dxdz$
- $\pm\frac{\nabla G}{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)}dxdz$
- $\pm\frac{\nabla G}{\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)}dxdz$

14 For et kontinuerleg skalarfelt $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ og en kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^n$. Hvis $\mathbf{r}(t):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{r}^*(u):[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ er to parametriseringer for $\mathcal{C}$, men med motsatt orientering, hva vet vi da om verdien på linjeintegralene $\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|dt$ og $\int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}^*(u))|\frac{d\mathbf{r}^*}{du}|du$?

Velg ett alternativ

- Gir same verdi kun hvis $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|=|\frac{d\mathbf{r}^*}{du}|$
- Gir samme verdi, men med motsatt fortegn
- Gir alltid samme verdi
- Gir kun samme verdi i spesialtilfeller

15 Gitt flatene $\mathcal{C} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ og $\mathcal{S} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



Hvilket uttrykk gir volumet av $\mathcal{V} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ ,\ x^2 + y^2 - z^2 \geq 0\}$?

Velg ett eller flere alternativer

- $\frac{4\pi}{3} - 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 R^2 \sin\phi dR d\phi d\theta$
- $\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 R^2 \sin\phi dR d\phi d\theta$
- $\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 R dR d\phi d\theta$
- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 R^2 \sin\phi dR d\phi d\theta$

16 Hvilke av desse vektorfunksjonane $\mathbf{F}$ på $\mathbb{R}^3$ er egnet til å rekna ut volumet av et lukket og avgrenset område $D \subset \mathbb{R}^3$ saman med divergensteoremet?

Velg ett eller flere alternativer

- $\mathbf{F} = x\mathbf{j}$
- $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$
- $\mathbf{F} = \frac{1}{3}((y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k})$
- $\mathbf{F} = \frac{1}{3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

17 Hvilke fire av konseptene nedenfor knyttes sammen av **Gauss'** teorem?
Velg ett eller flere alternativer

- Linjeintegral av vektorfelt
- Linjeintegral av skalarfelt
- Flateintegral av vektorfelt i 3D
- Flateintegral av skalarfelt i 3D
- Volumintegral av et skalarfelt
- Gradient av et skalarfelt
- Krølle (curl) av et vektorfelt
- Divergens av et vektorfelt
- Randen av en flate er en kurve uten ender
- Randen av et volum er en flate uten render

18 Hvilke fire av konseptene nedenfor knyttes sammen av **Stokes'** teorem?
Velg ett eller flere alternativer

- Linjeintegral av vektorfelt
- Linjeintegral av skalarfelt
- Flateintegral av vektorfelt i 3D
- Flateintegral av skalarfelt i 3D
- Volumintegral av et skalarfelt
- Gradient av et skalarfelt
- Krølle (curl) av et vektorfelt
- Divergens av et vektorfelt
- Randen av en flate er en kurve uten ender
- Randen av et volum er en flate uten render

19 Gitt funksjonen $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ hvilke av følgende utsagn er sanne (vi skriver $\mathbf{x} = (x,y)$):

Velg ett eller flere alternativer

- $\lim_{h\to 0} f(h\mathbf{a} + \mathbf{x}) = 0$, i alle retninger $\mathbf{a}$
- $\lim_{h\to 0} f(h\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{1}{2}$, når $\mathbf{a}$ er tangent til linjen $y - x = 0$
- $\lim_{h\to 0} f(h\mathbf{a} + \mathbf{x}) = -\frac{1}{2}$, når $\mathbf{a}$ er tangent til linjen $y + x = 0$
- $\lim_{h\to 0} f(h\mathbf{a} + \mathbf{x}) = 1$, når $\mathbf{a} = (1,0)$
- $\lim_{h\to 0} f(h\mathbf{a} + \mathbf{x}) = 0$, når $\mathbf{a} = (0,1)$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer ikke

20 Beregn flateintegralet $\int\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} dS$, der $\mathbf{F}(x,y,z) = xz^3\mathbf{i} + \frac{x^3}{\ln|z|}\mathbf{j} + y^2(x^2 + \frac{1}{2}y^2)\mathbf{k}$, og $\mathcal{S} = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ med enhetsnormalvektor $\hat{\mathbf{N}}$ pekende ut fra origo.

Velg ett alternativ

- $\frac{\pi}{5}$
- 0
- 2π
- $\frac{5}{2}\pi$

21 Gitt et konservativt vektorfelt $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{yz}\cos x, e^{yz}z\sin x, e^{yz}y\sin x)$, finn potensialfunksjonen:

Velg ett alternativ

- $e^{xy}\sin z$
- $e^{yz}\cos x$
- $e^{yz}\sin x$
- $e^{yz}(\sin x + \cos x)$

Beregn $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ for $\mathcal{C} = \{(x,y,z) : z - x^2 - y^2 = 0, z = 1 - x - y\}$

Velg ett alternativ

- 0
- $3\pi - \sqrt{2}$
- $e\cos\pi - 1$
- $3\pi - \sqrt{2}(e\cos\pi - 1)$

22 La funksjonen $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ være gitt på et bundet domene ved $u(x, y) = \frac{x^2}{y}$ og $v(x, y) = x + 2y$. Hva er Jacobi-determinanten av $\mathbf{F}(x, y)$?

Velg ett alternativ

- $-\frac{x+2y}{x^3}$
- $2\frac{x+y}{y}$
- $\frac{4xy+x^2}{y^2}$
- $\frac{4x}{y}$

Hvilke krav må du sette til x og y for at der eksisterer minst én inversfunksjon $\mathbf{F}^{-1}(u, v)$?

Velg ett eller flere alternativer

- $y \neq 0$
- $\mathbf{F}(x, y)$ er ikke inverterbar for noen verdier av (x, y)
- $x \neq 0$
- $\mathbf{F}(x, y)$ er inverterbar for alle verdier av (x, y)
- $y \neq -x/4$

Regn ut $\iint_{\mathcal{S}}(\frac{1}{xy} + \frac{2}{2xy+x^2})dxdy$ når området $\mathcal{S}$ ligger i første kvadrant og er begrenset av kurvene $2y + x = 1, 2y + x = 2$, $\frac{x^2}{y} = 1$, $\frac{x^2}{y} = 2$. Verdien av integralet er da gitt ved:

Velg ett alternativ

- 0
- 1
- $2\ln 2$
- 2
- 4
- $(\ln 2)^2$

23 Gitt et flateutsnitt av en helicoide $\mathcal{S}$, uttrykt ved
$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ for $0 \leq u \leq 1$ og $0 \leq v \leq \pi$.

Kurveintegralet tar formen
$\oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = a + b\pi$.

Gitt at $\mathbf{F} = (z, x, y)$, finn verdiene for a og b:
[Muligens nyttig å vite: $(\cos t)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$]

Oppgi tallverdiene for a og b

I pensum er det forskjellige måter å regne ut det ovenstående integralet. Redegjør kort for de to måtene å beregne løsningen, og hva som er de nødvendige løsningsstegene.

Maks 20 setninger