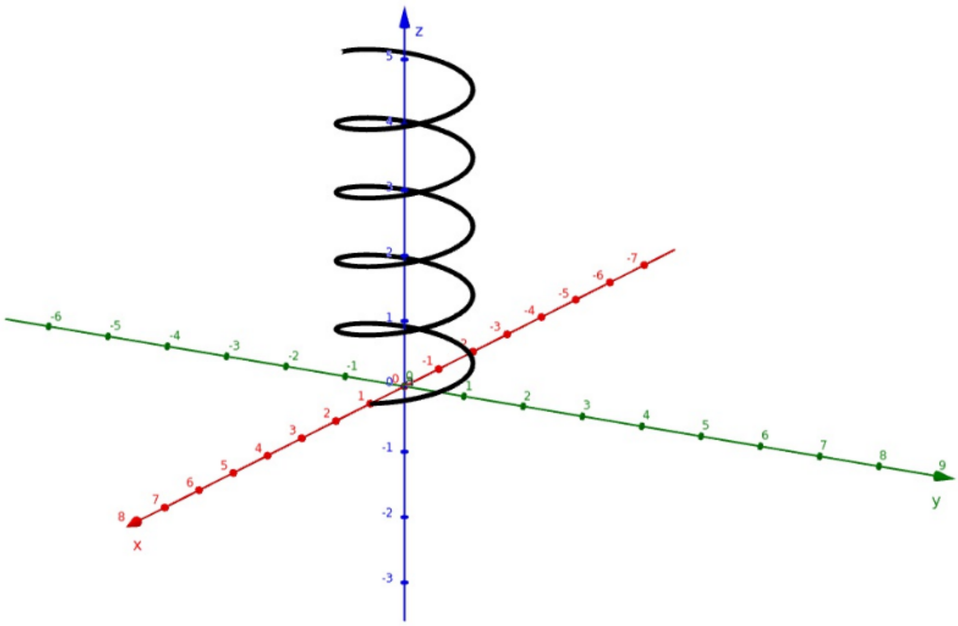
Løsningsforslag til Eksamen MAT212 Høsten 19

Oppgave 1

1 Betrakt kurva (orientert frå bunn mot topp)



Kva er sant om krumninga til kurva?

Vel eitt alternativ

- Ho aukar for aukande z
- Ho er konstant ✔
- Ho er negativ
- Ho er lik 0

Kva er sant om torsjonen til kurva?

Vel eitt alternativ

- Han endrar seg avhengig av kvar vi er i x,y-planet, men er konstant i z-retning
- Han er konstant ✔
- Han aukar for aukande z
- Han er lik 0

Kva er sant om binormalvektoren $\hat{\mathbf{B}}$ til kurva?

Vel eitt alternativ

- Han endrer fortekn for kvar heile runde om z-aksen.
- Han endrar fortekn for kvar halve runde om z-aksen.
- Han peiker i positiv z-retning. ✔
- Han peiker i negativ z-retning.

Kva er eit passende uttrykk for ein parametrisering av kurva?
Vel eitt alternativ

- $\mathbf{r}(t) = [cos(at), sin(at), e^t]$
- $\mathbf{r}(t) = [\cos(bt), \sin(at), bt]$
- $\mathbf{r}(t) = [\cos(at), \sin(at), bt]$ ✔
- $\mathbf{r}(t) = [at^2, at^2, bt]$

Kan kurva skrivast som ein funksjon z(x,y)?
Vel eitt alternativ

- Usant ✔
- Sant

Oppgave 2

2 I denne oppgaven betrakter vi ligningen $(x+y+z)^2 + sin(x+y) + cos(\pi z) = 0$.

Vis at x kan beskrives som en funksjon av y og z i en omegn av punktet $(0,0,1)$.

Ligningen kan skrives som en funksjon $x(y,z)$ i en omegn av punktet $(0,0,1)$ dersom punktet tilfredsstiller ligningen og

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((x+y+z)^2 + \sin(x+y) + \cos(\pi z)\Big)\,|_{(0,0,1)} \neq 0.$$

Vi sjekker at punktet $(0,0,1)$ tilfredsstiller ligningen:

$$(0+0+1)^2 + \sin(0) + \cos(\pi) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Og regner den partieltderiverte med hensyn på x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big((x+y+z)^2 + \sin(x+y) + \cos(\pi z)\Big)\,|_{(0,0,1)} \\ = 2(x+y+z) + \cos(x+y)|_{(0,0,1)} \\ = 2 + 1 = 3 \neq 0,\end{aligned}$$

altså kan man skrive $x(y,z)$ som en funksjon i en omegn av punktet $(0,0,1)$.

Finn en normalvektor til flaten $x(y,z)$.

En normalvektor til flaten $x(y,z)$ i en omegn av punktet $(0,0,1)$ er gitt ved vektoren

$$\mathbf{N} = \left[1, -\frac{\partial x}{\partial y}, -\frac{\partial x}{\partial z}\right] = \left[1, 1, \frac{2(x+y+z) - \pi\sin(\pi z)}{2(x+y+z)+\cos(x+y)}\right],$$

der vi har brukt $\dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} = -\dfrac{2(x+y+z)+\cos(x+y)}{2(x+y+z)+\cos(x+y)} = -1$ for

$$G = \left((x+y+z)^2 + \sin(x+y) + \cos(\pi z)\right),$$

og tilsvarende for å regne $\frac{\partial x}{\partial z}$.

> Finn lineariseringen (1. ordens Taylor-utvikling) til $x(y,z)$ i en omegn av punktet $(0,0,1)$.

Lineariseringen til $x(y,z)$ i punktet er gitt ved $\mathbf{N}(0,0,1)\cdot[x-0, y-0, z-1] = 0$. Da får vi planet gitt ved følgende ligning:

$$x + y + \frac{2}{3}(z-1) = 0.$$

Oppgave 3

> **3** Polarkoordinatar uttrykkast som oftast med transformasjonen
>
> $$x = r\cos\theta$$
> $$y = r\sin\theta$$
>
> Angi Jacobideterminantane som høyrer til transformasjonen og den inverse transformasjonen (du treng ikkje vise utrekninga)
>
> $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| =$ ____ (r)
>
> $\left|\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\right| =$ ____ $(\frac{1}{r})$

Oppgave 4

> **4** Løys dobbeltintegralet:
>
> $$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\, dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{r\sin(\theta)}{r^2} rdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)d\theta = 2.$$

Ved første likhetstegn ble koordinatskiftet til polarkoordinater gjennomført.

> Forklar med ord korleis integrasjonsområdet ser ut

En kvart sirkel i første kvadrant med radius 2.

Oppgave 5

5 Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$ er deriverbart i alle punkt i planet. Anta vidare at $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle moglege stykkevis glatte, enkelt samanhengande, lukka kurvar C i planet. Vurder om påstandane under er sanne eller usanne?

Om $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er to punkt i planet knytt saman av kurva C_1, så finnast ein skalarfunksjon $g(x, y)$ slik at $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = g(\mathbf{a}) - g(\mathbf{b})$.

- Usant
- Sant ✔

$\mathbf{F}$ er eit konservativt vektorfelt.

- Usant
- Sant ✔

Det finnast ein skalarfunksjon $g(x, y)$, slik at $\mathbf{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$

- Sant ✔
- Usant

z-komponenten til curlen til $\mathbf{F}$ er 0

- Sant ✔
- Usant

x-komponenten til curlen til $\mathbf{F}$ er 0

- Usant
- Sant ✔

Oppgave 6

6 Vi granskar vektorfeltet $\mathbf{F} = [3y + 2x\cos(x^2), 3x]$
Angi om påstandane under er sanne eller usanne.

$g(x, y) = 3y + 2x\cos(x^2) + 3x$ er ein potensialfunksjon til $\mathbf{F}$

- Usant ✓
- Sant

$g(x, y) = 3xy + sin(x^2) + 5$ er ein potensialfunksjon til $\mathbf{F}$

- Usant
- Sant ✓

$\mathbf{F}$ er eit konservativt felt, men har likevel ikkje ein potensialfunksjon

- Sant
- Usant ✓

$\mathbf{F}$ har ein potensialfunksjon, men det vil ikkje vere mågleg å finne han ved hjelp av rekning

- Usant ✓
- Sant

$\mathbf{F}$ er ikkje konservativt og har difor ikkje nokon potensialfinksjon

- Sant
- Usant ✓

Oppgave 7

7

Vi granskar igjen vektorfeltet $\mathbf{F} = [3y + 2x\cos(x^2), 3x]$
Vi let C vere kurva sett saman av dei to rette linjestykkane C_1 frå punktet (0,0) til (100,0) og C_2 frå punktet (100,0) til (0,1).

Rekn ut $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ved å løyse eit egna integral.

Fordi $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt kan vi skrive om linjeintegralet på følgende måte:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}_3$ er den rette linjen fra $(0,0)$ til $(0,1)$. En parametrisering av $\mathcal{C}_3$ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = [0,t]$ for $0 \leq t \leq 1$. Vi kan da regne ut integralet som dette:

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^1 [3t, 0] \cdot [0,1] dt = 0.$$

Om $\mathbf{F}$ har ein potensialfunksjon, rekn ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ved hjelp av denne, eller forklar kvifor dette ikkje lar seg gjere.

Vi har fra oppgave 6 at $g(x,y) = 3xy + \sin(x^2) + 5$ er en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$. Dermed kan vi regne

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = g(0,1) - g(0,0) = 5 - 5 = 0.$$

Oppgave 8

8 Kva er riktig formulering av resultatet i Stoke sitt teorem?

Vel eitt alternativ (Du vil her ikkje kunne få minuspoeng for feil svar)

- $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dr = \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} dS$
- $\int_{\partial D} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x} dr = \iint_D \mathbf{F} \cdot dS$
- $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dr = \iint_D \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$ ✔
- $\int_{\partial D} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dr = \iint_D \mathbf{F} \cdot dS$

Oppgave 9

9 Forklar relasjonen mellom Stoke sitt og Green sitt teorem (For full poengutteljing må ein vise relasjonen matematisk):

Green's teorem er et spesialtilfelle av Stoke's teorem, der vi kun ser på kurver i planet. Dersom vi lar $\mathcal{C}$ være en lukket kurve i xy-planet, D være området innlemmet av kurven og $\mathbf{F}(x,y) = [F_1, F_2, 0]$ være et glatt vektorfelt i planet kan vi anvende Stoke's teorem:

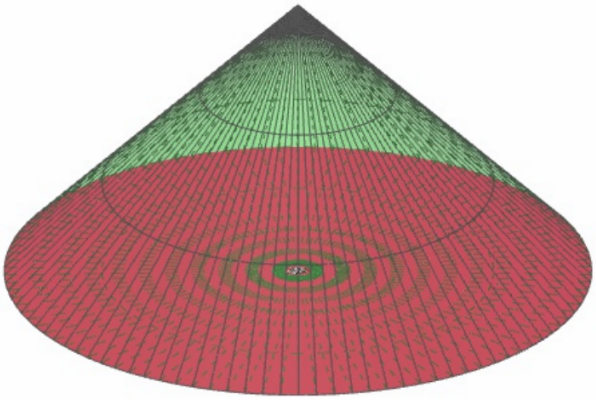
$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \iint_D curl(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

$$= \iint_D \left[0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right] \cdot [0,0,1] dx dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy,$$

og vi får Green's teorem.

Oppgave 10

10 I figuren under blir den grøne kjegla kalla D_1 og den raude disken (sirkulære flata) D_2. Forklar kvifor $\iint_{D_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ for vilkårlege glatte vektorfelt $\mathbf{F}$, når dei to flatane er orientert på ein høveleg måte.



Fra Stoke's teorem har vi

$$\int_{\partial D_1} F \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

og

$$\int_{\partial D_2} F \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Så lenge vi orienterer flatene med normalvektorer i "lik" retning, f.eks begge peker "oppover"(positiv z-komponent), så er $\partial D_1 = \partial D_2$, og de to fluksintegralene vil også være like.

Oppgave 11

11

$\mathcal{S}$ er flata gitt ved $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq -\sqrt{5}\right\}$.

Vi granskar vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F} = \left(-x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\mathbf{i} + e^z \mathbf{j} - \cos(x)\sin(y)\tan(z)\mathbf{k}$.

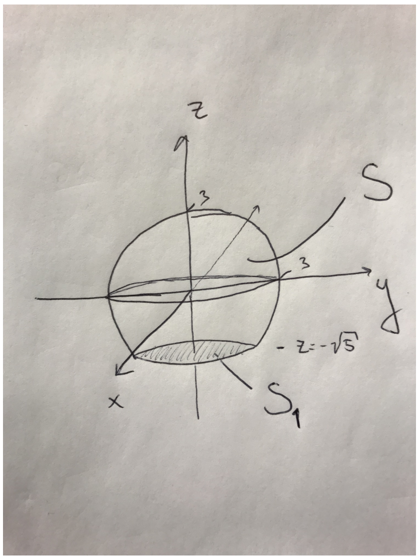
Rekn ut $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}(F) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$.

Vel orienteringa til flata slik at $\hat{\mathbf{N}}$ aldri peiker mot origo.

Ved a bruke argumentasjonen fra oppgave 10 kan vi regne

$$\iint_S curl(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{S_1} curl(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N_1} dS,$$

der $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 4, z = -\sqrt{5}\right\}$ (se bildet) og $\mathbf{N}_1 = [0, 0, 1]$.



Vi har da

$$\iint_{S_1} curl(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N_1} dS = \iint_{S_1} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dS = \iint_{S_1} x^2 + y^2 dS$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \frac{2^4}{4} = 8\pi.$$

Oppgave 12

> **12** Forklar på kva måte divergensteoremet kan nyttast til å rekne ut volumet av lekamar ved hjelp av fluksintegralar.

Man kan uttrykke volumet til et legeme D ved Volum$(D) = \iiint_D 1 dV$. Altså kan man benytte divergensteoremet på vektorfelt som har divergens lik 1 til å beregne volumer ved å løse fluksintegraler.

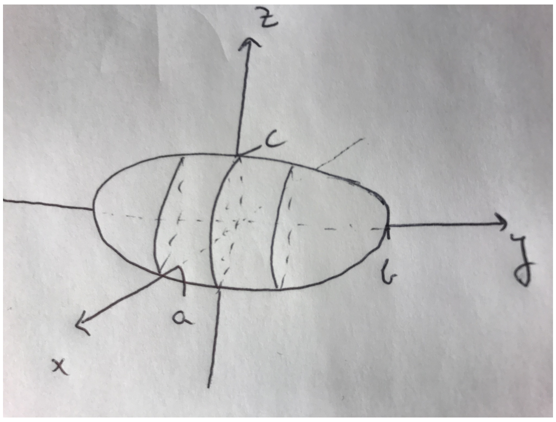
$$\iiint_D 1 dV = \iiint_D div(\mathbf{F}) dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

der $div(\mathbf{F}) = 1$, f.eks. kan man velge $\mathbf{F} = \frac{1}{3}[x, y, z]$.

Oppgave 13

> **13** E er den fylte ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. Massetettleiken til den fylte ellipsoiden er konstant og gitt ved $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\pi}$.
>
> Skisser ellipsoiden og berekn massen.

Skisse:



En parametrisering av ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ er gitt ved en "variant" av sfæriske koordinater

$$r(\phi, \theta) = [a\cos(\theta)\sin(\phi), b\sin(\theta)\sin(\phi), c\cos(\phi)],$$

for $0 \leq \phi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi kan så følge tankegangen fra oppgave 12:

$$\text{masse}(\mathcal{E}, \rho) = \iiint_{\mathcal{E}} \rho dV = \frac{1}{\pi} \iiint_{\mathcal{E}} dV = \frac{1}{\pi} \iint_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

der $\mathbf{F} = \frac{1}{3}[x, y, z]$ og $\mathcal{E}$ er den fylte ellipsoiden og $\partial\mathcal{E}$ er parametrisert av $r(\phi, \theta)$. Vi kan nå regne ut det siste integralet:

$$\iint_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(r(\phi, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta,$$

der $\left(\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \left[bc\cos(\theta)\sin^2(\phi), ac\sin(\theta)\sin^2(\phi), ab\sin(\phi)\cos(\phi)\right]$ og $\mathbf{F}(r(\phi, \theta)) = \frac{1}{3}[a\cos(\theta)\sin(\phi), b\sin(\theta)\sin(\phi), c\cos(\phi)]$. Vi får da

$$\mathbf{F}(r(\phi, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \frac{abc}{3} \sin(\phi),$$

og vi kan regne

$$\text{masse}(\mathcal{E}, \rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{abc}{3} \sin(\phi) d\phi d\theta = \frac{4abc}{3}.$$