NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0301 Elementær diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Martin Strand

Tlf: 970 27 848

Eksamensdato: 23. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Ta med så mye mellomregning og forklaring at det er enkelt å forstå hvordan du har tenkt.

Oppgavesettet består av ti punkter, og hvert punkt teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Hvor mange ord kan du lage av bokstavene i ordet MYGGSTIKK? I hvor mange av disse står begge G-ene ved siden av hverandre?

Oppgave 2 Er dette et gyldig argument?

$$(p \to r) \wedge (p \vee q) \wedge (q \to s) \wedge (\neg r) \to s$$

Oppgave 3 La A være en mengde, og la $\mathcal{P}(A)$ være potensmengden til A. Vis at $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Oppgave 4 Bevis ved induksjon at

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

holder for alle positive heltall.

Oppgave 5 La $\mathbb{Z}$ være heltallene, og la $\mathbb{Q}$ være alle brøker. Husk at $\mathbb{Z} - \{0\}$ betyr alle heltall unntatt null, og la $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \to \mathbb{Q}$ være funksjonen gitt ved

$$f(a, b) = \frac{a}{b}.$$

Er f

i. injektiv?

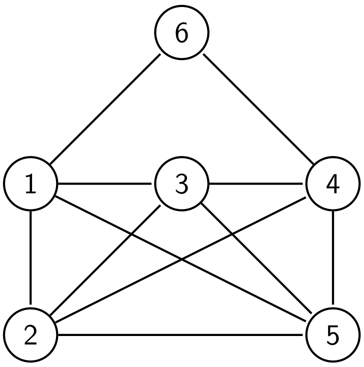
ii. surjektiv?

Oppgave 6 Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner alle ordene i språket

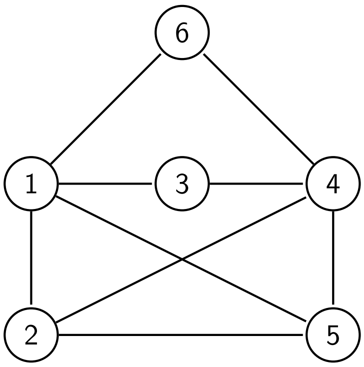
$$\{01\}\{11\}^*\{1\} \cup \{1\}\{0, 1\}^*$$

Oppgave 7 Hva er en elementær oppdeling (*elementary subdivision*)? Hva vil det si at to grafer er homeomorfe? Avgjør om grafene under er planare eller ikke.

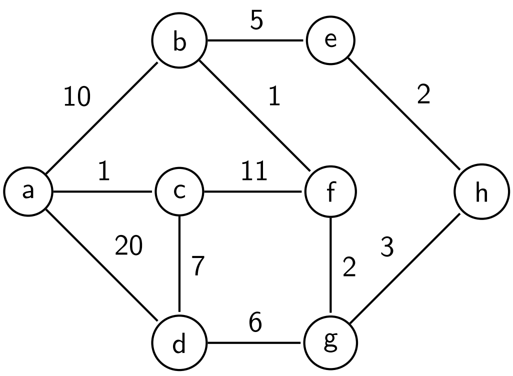
G_1:



G_2:



Oppgave 8 Finn korteste vei fra a til h i denne grafen, ved hjelp av Dijkstras algoritme. Du trenger ikke å forklare hvert steg i detalj, men oppgi alle etikettene på hjørnene, samt en beskrivelse av korteste vei og hvor lang den er.



Oppgave 9 Definer relasjonen $\sim$ på $\mathbb{Z}$ ved $a \sim b$ dersom $a - b$ er delelig med 5, altså at $\frac{a-b}{5}$ er et heltall.

a) i. Hva er en ekvivalensrelasjon?

ii. Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

iii. Beskriv ekvivalensklassene til $\sim$. Hvor mange ekvivalensklasser er det?

La $\mathcal{R}_1$ være ekvivalensklassen til 1, $\mathcal{R}_2$ være ekvivalensklassen til 2, og så videre. Husk at en representant for en ekvivalensklasse er et element i klassen, og at en klasse kan ha mange representanter.

b) La x og y være vilkårlige heltall. Begge er da representanter for sin ekvivalensklasse. I hvilken av ekvivalensklassene $\mathcal{R}_1$ til $\mathcal{R}_5$ ligger da $x + y$? Hva med $x \cdot y$?

Hint: Prøv deg først fram med noen tilfeldig valgte tall, og sjekk hvilken klasse summen av dem kommer i. Kan du se et mønster, og klarer du å beskrive mønsteret? En fullstendig besvarelse av oppgaven krever en helt presis beskrivelse og forklaring.