NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamen i **MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen Trond Digernes[a], Erik M. Bakken[b]

Tlf [a]926 63 816 , [b]901 44 451

Eksamensdato 27. mai 2014

Eksamenstid (fra–til) 15:00–19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon
Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk Bokmål

Antall sider 2

Antall sider vedlegg 2

Kontrollert av

Dato Sign

Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 25x.$$

Finn spesielt den løsningen som tilfredsstiller $y(0) = -3$, $y'(0) = 3$.

Oppgave 2 Gitt ellipsen

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3.$$

Bestem følgende geometriske objekter og data assosiert med ellipsen: sentrum, eksentrisitet, brennpunkter, styrelinjer og lengden på halvaksene. Lag en skisse av kurven, med de geometriske objektene inntegnet.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi finne en tilnærmet verdi for $\pi/4$ på to måter, og sammenligne de to metodene. Til dette skal vi benytte relasjonene $\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ og $\arctan(1) = \pi/4$.

a) Bruk trapesmetoden med 4 delintervaller på integralet $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ til å finne en tilnærmet verdi for $\pi/4$. Gjør også et overslag over feilen; her kan du bruke (uten bevis) at $\left| \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \right| \leq 2$ for $t \in [0, 1]$.

b) Bruk summeformelen for en geometrisk rekke til å utlede relasjonen

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Vis at denne relasjonen også gjelder i endepunktene $x = \pm 1$, slik at spesielt

$$\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{$*$}$$

c) Finn en tilnærmet verdi for $\pi/4$ ved å ta med de 5 første leddene i rekken $(*)$. Bruk feilestimatet for alternerende rekker til å gi et overslag over feilen. Hvor mange ledd må du ta med for at nøyaktigheten skal bli like god som i punkt **a)**?

Oppgave 4 La $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrekkeløsning til differensialligningen

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

a) Forklar hvorfor $y'(0) = 0$, og bestem alle koeffisientene a_n når $y(0) = 1$.

b) Bestem konvergensintervallet til rekken funnet i **a)**, og finn et endelig uttrykk for summen.

Formelark

Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Taylors formel med restledd

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \\ &= T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Generalisert binomialkoeffisient (r: et reelt tall, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Trapesmetoden Hvis f har kontinuerlig andrederivert på $[a, b]$ og $|f''(x)| \leq K$ der, så har vi:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

der n er antall delintervall og h er lengden på disse.

Simpsons metode Hvis f har kontinuerlig fjerdederivert på $[a, b]$ og $|f^{(4)}(x)| \leq K$ der, så har vi

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{2880}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{2880n^4}$$

der n er antall delintervall (må være et partall) og h er lengden på disse.

(forts. neste side)

Numerisk løsning av initialverdiproblemet $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$.

- **Eulers metode** $x_n = x_0 + nh \qquad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$
- **Eulers midtpunktmetode** $x_n = x_0 + nh \qquad y_n = y_{n-1} + f(x'_{n-1}, y'_{n-1})h$ der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + h/2, y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h/2)$.

Kjeglesnitt Ligning for kjeglesnitt med eksentrisitet $\epsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), styrelinje $x = L$ og brennpunkt i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\epsilon^2 - 1)\left((x - \overline{x})^2 - a^2\right),$$

der $\overline{x} = \frac{B - \epsilon^2 L}{1 - \epsilon^2}$ = sentrum i kjeglesnittet og $a^2 = \left(\frac{\epsilon(B-L)}{1-\epsilon^2}\right)^2$.
For $\epsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2.$$