NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Katrin Grunert

Tlf: 411 87 331

Eksamensdato: 20. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Hvilke to egenskaper må en mengde $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ av vektorer i et endeligdimensjonalt vektorrom V oppfylle for å være en basis for V?

b) La V være et n-dimensjonalt vektorrom med basis $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.
Vis at hver $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

med $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ på en entydig måte.

c) La V være et n-dimensjonalt indreproduktrom med indreprodukt $\langle ., . \rangle$ og med ortonormal basis $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.
Hva vil det si at $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal basis?
Vis at hver $\mathbf{v} \in V$ kan skrives som

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n.$$

Oppgave 2 La P_2 være vektorrommet av alle polynomer med reelle koeffisienter av grad mindre enn eller lik 2, dvs.

$$P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

med basis $B = \{1, x, x^2\}$ og P_1 vektorrommet av alle polynomer med reelle koeffisienter av grad mindre enn eller lik 1 med basis $\tilde{B} = \{1 - x, 1 + x\}$. Se på lineærtransformasjonen $T : P_2 \to P_1$ gitt ved

$$T(p(x)) = 2xp'(x) - 4p(x) \quad \left(= 2x\frac{d}{dx}p(x) - 4p(x)\right).$$

(Du trenger ikke å vise at dette er en lineær transformasjon.)

a) Finn $[T]_{\tilde{B},B}$ og forklar sammenhengen mellom $[T]_{\tilde{B},B}$ og T ved hjelp av et diagram.

b) Finn $R(T)$, bildet til T.

c) Er T surjektiv (altså på)? Er T injektiv (altså en-til-en)? Er T en isomorfi?

d) Finn $T(2x - 4x^2)$ på to forskjellige måter.

e) La $\tilde{T}$ være den lineære transformasjonen $\tilde{T} : P_2 \to P_2$ gitt ved

$$\tilde{T}(p(x)) = 2xp'(x) - 4p(x) \quad \left(= 2x\frac{d}{dx}p(x) - 4p(x)\right).$$

(Du trenger ikke å vise at dette er en lineær transformasjon).
Er $\tilde{T}$ surjektiv (altså på)? Er $\tilde{T}$ injektiv (altså en-til-en)?

Oppgave 3 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A og basiser for egenrommene til A.

b) Diagonaliser matrisen A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Danner kolonnevektorene i P en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$ med hensyn på det euklidske indreproduktet?

Oppgave 4 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Finn $rank(A)$, $nullity(A)$, $rank(A^T)$ og $nullity(A^T)$.

b) Finn en basis for kolonnerommet til A.
Finn en basis for radrommet til A.
Finn en basis for nullrommet til A.

Oppgave 5 To spillere R og C spiller et to personers nullsum matrisespill med avkastningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

hvor elementet a_{ij} angir hvor mye R må betale til C, dersom R sitt trekk er i og C sitt trekk er j.

a) Hvis strategien til spilleren R er $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ og strategien til spilleren C er $\mathbf{q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, hvor stor blir den forventede avkastningen for R og for C i det lange løp?

b) Finn den optimale strategien $\mathbf{p}^*$ til R, den optimale strategien $\mathbf{q}^*$ til C og spillets verdi $E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$.