Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4105 Matematikk 2**

Faglig kontakt under eksamen: Ulrik Skre Fjordholm[a], Harald Hanche-Olsen[b]

Tlf: [a] 7355 0284 , [b] 7359 3525

Eksamensdato: 3. juni 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C
Godkjent kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La f være funksjonen gitt ved

$$f(x, y, z) = \cos x + e^{3yz}.$$

I hvilken retning blir den retningsderiverte til f i punktet $(\pi, 0, 1)$ størst?

Regn ut den retningsderiverte i punktet $(\pi, 0, 1)$ i denne retningen.

Oppgave 2 Finn buelengden av kurven med parameterfremstilling

$$x(t) = 3(t-1)^2, \quad y(t) = 2(2t-1)^{3/2} \qquad \text{for } 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Oppgave 3 Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x, y) = xy$ på kurven $3x^2 + y^2 = 6$.

Oppgave 4 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{x}{1 + x^2y^2}\,\mathbf{j}$.

Vis at $\mathbf{F}$ er konservativt, finn en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ og bruk denne til å finne verdien av $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der $\mathcal{C}$ er kurven parametrisert ved

$$x(t) = \frac{1+t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t+t^2}{1+t^2} \qquad \text{for } -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Oppgave 5

a) Skissér integrasjonsområdet for dobbeltintegralet $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} x^4 y \, dx \, dy$.

b) Bytt om integrasjonsrekkefølgen, og beregn verdien av integralet.

Oppgave 6

a) Finn divergensen av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (3y^2 - 1)z\,\mathbf{k}$.

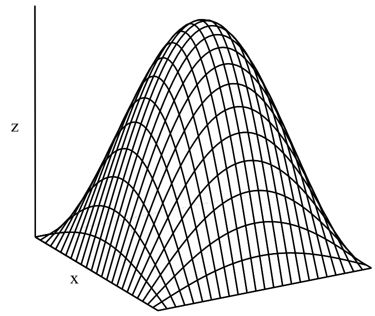
b) Regn ut fluksen av $\mathbf{F}$ opp gjennom den delen av flaten $z = \ln\big(2 - (x^2 + y^2)^2\big)$ som ligger over xy-planet.

Oppgave 7 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy-z}\,\mathbf{i} + \sin z^3\,\mathbf{j} + x^4 z\,\mathbf{k},$$

og flaten $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$z = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \qquad \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ og } 0 \leqslant y \leqslant 1.$$



Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

der enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv z-komponent.

Oppgave 8 Flaten

$$R = 3 + 2\cos\phi$$

gitt i kulekoordinater (sfæriske koordinater) avgrenser et legeme T. Finn volumet av den delen av T som ligger over xy-planet.

Formelliste

Annenderiverttesten er basert på

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystemer

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater (R, ϕ, θ)

$$x = R\sin\phi\cos\theta, \quad y = R\sin\phi\sin\theta, \quad z = R\cos\phi$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv \text{ og tilsvarende i tre dimensjoner}$$

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\,dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\,dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\,dm, \quad dm = \rho(x,y,z)\,dV$$

Vektoranalyse

Greens teorem: $\displaystyle\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$