NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4120 Matematikk 4K**

Fagleg kontakt under eksamen: Katrin Grunert og Espen R. Jakobsen

Tlf:

Eksamensdato: 2. desember, 2014

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: (Kode C): Tillaten enkel kalkulator. Rottmann: Matematisk formelsamling

Annan informasjon:
Alle svar må grunngjevast, og det skal gå klart fram korleis du har kome fram til svara.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Bruk Laplacetransformen til å løyse initialverdiproblemet

$$y'(t) + y(t) = e^{-t}\cos t - 5u(t-1), \qquad y(0) = 0,$$

der u er Heaviside/enhetsstegsfunksjonen.

Oppgåve 2 Fourier-cosinusrekka til funksjonen $f(x) = \sin(\pi x)$ på intervallet $[0, 1]$ er

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1}\cos(2n\pi x).$$

Skisser summen av rekka på intervallet $[-2, 2]$.

Bruk Fourier-cosinusrekka til å rekne ut summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Oppgåve 3 Gjeve initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + 3u_x(x,t) + 5u(x,t) &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

der funksjonane $g(x)$ og $u(x,t)$ er slik at dei Fouriertransformerte eksisterer og $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$.

Bruk Fouriertransformen til å finne løysinga $u(x,t)$.

Hint: $\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iaw}\hat{f}(w)$.

Oppgåve 4 La funksjonen $f(z)$ vere gjeven ved

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z(1 - z^2)}.$$

a) Rekn ut linjeintegrala

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz \qquad \text{og} \qquad \oint_{|z-1|=\frac{11}{10}} f(z)\,dz,$$

der begge sirklane er orienterte mot klokka.

b) Finn begge Laurentrekkene til $f(z)$ som har sentrum i $z = 0$.

c) Ei av Laurentrekkene til $f(z)$ med sentrum i $z = 1$ konvergerar i punktet $z = i$. Kva er (det største) konvergensområdet til denne rekka?

Oppgåve 5 La $r > 0$ og S_r vere halvsirkelen med parametrisering $z(t) = re^{it}$ for $0 \leq t \leq \pi$. Bevis at

$$\lim_{r\to 0} \int_{S_r} \left(\frac{3}{z^2+4} + \frac{7}{z} \right) dz = 7\pi i \qquad \text{og} \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \frac{z+i}{1+z^4}\, dz = 0.$$

Oppgåve 6 La funksjonen $u(x, y)$ vere løysinga av randverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) &= \sin x, \qquad && 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(0,y) = 0 &= u(\pi, y), && 0 < y < \pi, \\ u(x,0) = 0 &= u(x,\pi), && 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

a) Kva for randverdiproblem løyser funksjonen

$$v(x, y) = u(x, y) + \sin x?$$

Grunngi svaret.

b) Rekn ut løysinga $u(x, y)$.

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$