NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau

Tlf: 7359 1755

Eksamensdato: 16. desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:0013:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Bestemt, enkel kalkulator, Rottmans matematiske formelsamling.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Eksamenssettet består av to deler: Oppgavene 1 til 7 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 8, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 8 teller 50%, og oppgavene 1 til 7 teller 50%.
Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de syv første oppgavene.

Oppgave 1

Tegn det rotfestede treet som representerer uttrykket

$$\frac{4+x^2}{y-(3+x)^3}$$

og skriv ned prefix formen til uttrykket.

Oppgave 2

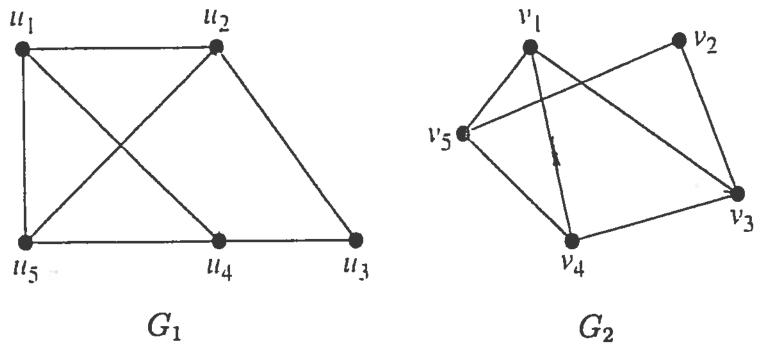
Finn den negative heltallsløsningen x som har minst absoluttverdi til kongruensligningene:

$$x \equiv 3 (\text{mod } 10)$$
$$x \equiv 9 (\text{mod } 17)$$
$$x \equiv 12 (\text{mod } 31)$$

Oppgave 3

a) Er grafene G_1 og G_2 i Figur 1 isomorfe eller ikke? Begrunn svaret.

b) Gi en begrunnelse for om grafene G_1 og G_2 er todelte eller ikke.



Figur 1.

Oppgave 4

Vis ved induksjon ulikheten

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

for alle positive hele tall n større eller lik 1.

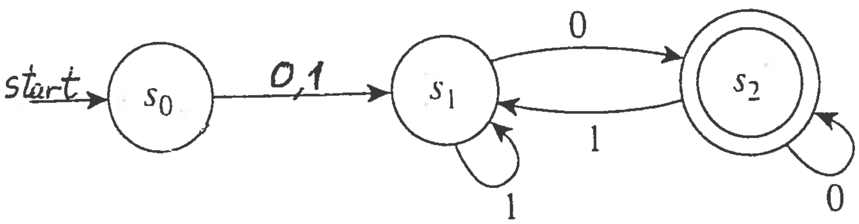
Oppgave 5

a) Hvor mange binære strenger finnes det av lengde seksten som består av fire $1'$ere og tolv $0'$er, der hver streng starter med 1 og dessuten skal hver $1'$er etterfølges av minst to $0'$er?

b) På hvor mange måter kan man fordele tolv distinkte gjenstander i seks distinkte bokser slik at to gjenstander plasseres i hver boks?

Oppgave 6

a) Finn et regulært uttrykk for språket som den endelige deterministiske tilstandsautomaten i Figur 2 gjenkjenner.



Figur 2.

b) Beskriv en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$ slik at språket $L(G)$ som G genererer er det samme som språket automaten i a) gjenkjenner.

Oppgave 7

Konstruer en deterministisk endelig tilstandsautomat $M = (S, \{0, 1\}, f, s_0, F)$, der $|S| = 4$, som gjenkjenner språket $L(M)$ bestående av alle binære strenger med $4k + 1 (k = 0, 1, 2, \cdots)$ $1'$ere, og finn et regulært uttrykk som representerer $L(M)$.

Oppgave 8

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første syv oppgavene. Det vil være minst ett, men gjerne flere rette svar-alternativer for hver deloppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr. kryss mer enn 10.

Deloppgave 1.

Hvilke av følgende logiske utsagn er tautologier?

Alt 1) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
Alt 2) $(p \vee (\neg p \wedge \neg q)) \rightarrow ((\neg(r \vee q)) \vee p)$
Alt 3) $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$
Alt 4) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Deloppgave 2.

Hvilke av følgende funksjoner $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, der $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, er surjektive?

Alt 1) $f(m,n) = |m-n| - m + n$
Alt 2) $f(m,n) = 2|m| + |n|$
Alt 3) $f(m,n) = (m+n)^2 - 2mn$
Alt 4) $f(m,n) = 2|m| + 3|n|$

Deloppgave 3.

Hvor mange forskjellige veier av lengde fire eksisterer det mellom to distinkte noder i K_5? (K_5 er den komplette grafen på 5 noder)

Alt 1) 52
Alt 2) 51
Alt 3) 13
Alt 4) 12

Deloppgave 4.

La $A = \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$, der $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$. La R være relasjonen på A definert ved $((a, b), (c, d)) \in R$ dersom $a|c$ og $a|d$, dvs. a er en divisor til både c og d. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er refleksiv.
Alt 2) R er symmetrisk.
Alt 3) R er antisymmetrisk.
Alt 4) R er transitiv.

Deloppgave 5.

En person starter med kjedebrev ved å sende tre brev til tre personer. Hver person som blir involvert i dette prosjektet og som mottar kjedebrevet bes om å videresende det til tre andre personer. Noen gjør det, mens andre lar være å sende kjedebrevet videre. Vi antar at ingen mottar mer enn et brev. Det hele stopper opp etter en tid, og da har 101 personer mottatt kjedebrevet, men ikke sendt det videre. Hvor mange personer ialt er det som har sendt kjedebrevet videre?

Alt 1) 50
Alt 2) 33
Alt 3) 20
Alt 4) 60

Deloppgave 6.

Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; n \geq 2$, med initialbetingelsene $a_0 = -5, a_1 = -1$. Hva er a_{13}?

Alt 1) -8189
Alt 2) -16387
Alt 3) -8195
Alt 4) -16381

Deloppgave 7.

La universalmengden være de rasjonale tallene **Q**. Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) $\neg\forall x\forall y\exists z((x < y) \to ((z > x) \wedge (z < y))$
Alt 2) $\neg\forall x\exists y(x + y \neq 1)$
Alt 3) $\neg\exists x\forall y(xy = 1)$
Alt 4) $\neg\forall x\forall y((x < y) \to (x^2 < y^2))$

Deloppgave 8.

Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) $28^{3277} \equiv 28 (\mathrm{mod}\, 29)$
Alt 2) Den komplette grafen K_{30} på 30 noder har en Eulerkrets.
Alt 3) Dersom en urettet graf har en node med odde grad, så finnes en annen node som også har odde grad.
Alt 4) Den heksadesimale ekspansjonen av $(981679)_{10}$ er $(DFAAF)_{16}$.

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir -3 poeng. Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

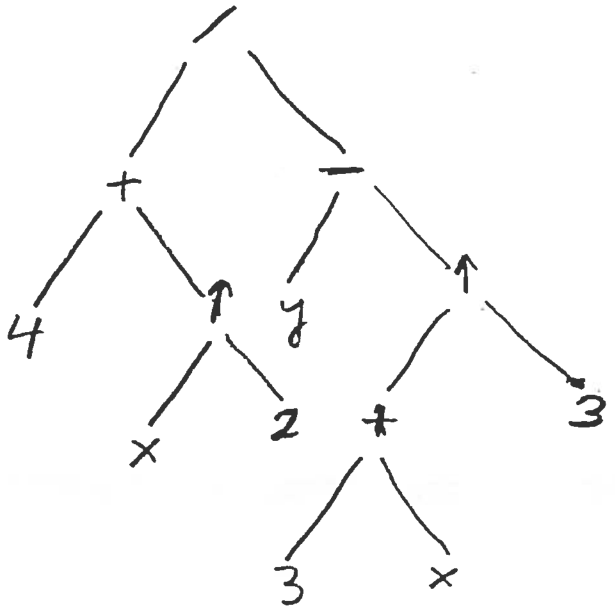
Kandidatnummer: | |
|---|

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				

Eksamen i TMA4140: Diskret Matematikk
16 Desember 2014

Løsningsforslag

Oppgave 1



$/ + 4 \uparrow x\ 2 - y \uparrow + 3 \times 3$

Oppgave 2

$m = 10 \cdot 17 \cdot 31 = 5270$

$M_1 = \frac{m}{10} = 527,\ M_2 = \frac{m}{17} = 310,\ M_3 = \frac{m}{31} = 170$

$M_1 y_1 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow y_1 = 3$

$M_2 y_2 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow y_2 = -4$

$M_3 y_3 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow y_3 = -2$

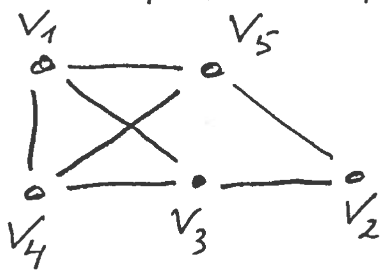
Ved det kinesiske restteoremet får man den generelle løsningen:

$x = M_1 y_1 \cdot 3 + M_2 y_2 \cdot 9 + M_3 y_3 \cdot 12 + k \cdot m \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$= -10497 + k \cdot 5270$. Velger man $k = 1$ får man den søkte løsningen $x = \underline{\underline{-5227}}$

Oppgave 3

a) Flytter man noden v_5 på den andre siden av kanten (v_1, v_3) så får man følgende presentasjon av grafen G_2:



Da ser man at G_1 og G_2 er isomorfe. Man har følgende bijeksjoner mellom $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ og $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ som gir en isomorfi:

$u_3 \Leftrightarrow v_2$, $\{u_2, u_4\} \Leftrightarrow \{v_3, v_5\}$,

$\{u_1, u_5\} \longleftrightarrow \{v_1, v_4\}$, der

$\{u_i, u_j\} \Leftrightarrow \{v_k, v_l\}$ skal forstås som at man kan velge fritt om u_i skal svare til v_k eller v_l (og da u_j nødvendigvis til v_l eller v_k).

b) G_1 (og dermed nødvendigvis G_2) er ikke en todelt graf siden man lett ser at man ikke kan fargelegge nodene med to farger slik at nabonoder har forskjellig farge.

Oppgave 4

$n=1$ gir $\frac{1}{2}$ på begge sider av ulikheten, så ulikheten er sann for $n=1$. Anta ulikheten er sann for n. Vi skal vise at ulikheten er sann for $n+1$. Da må

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Vi må vise: $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

Dette leder til at man må vise ulikheten

$$(3n+4)(2n+1)^2 \leq (3n+1)(2n+2)^2$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ 12n^3+28n^2+19n+4 & & 12n^3+28n^2+20n+4 \end{array}$$

Vi ser at ulikheten er sann, og dermed har vi vist ved induksjon at ulikheten er sann for alle n.

Oppgave 5

a) $100\underbrace{\cdots100\cdots100\cdots}_{\text{lengde}=13}100$ Problemet reduseres til å finne antall strenger av lengde 7 med to typer symboler, nemlig fire 0'er og tre 100'er.

Svar: $\frac{7!}{3!4!} = \underline{\underline{35}}$

b) $\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!} = 7.484.400$

Oppgave 6

a)

$$(0 \cup 1)1^*00^*(11^*00^*)^*$$

b) La $s_0 \leftrightarrow S$, $s_1 \leftrightarrow A_{s_1}$, $s_2 \leftrightarrow A_{s_2}$

$V = \{S, A_{s_1}, A_{s_2}, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$

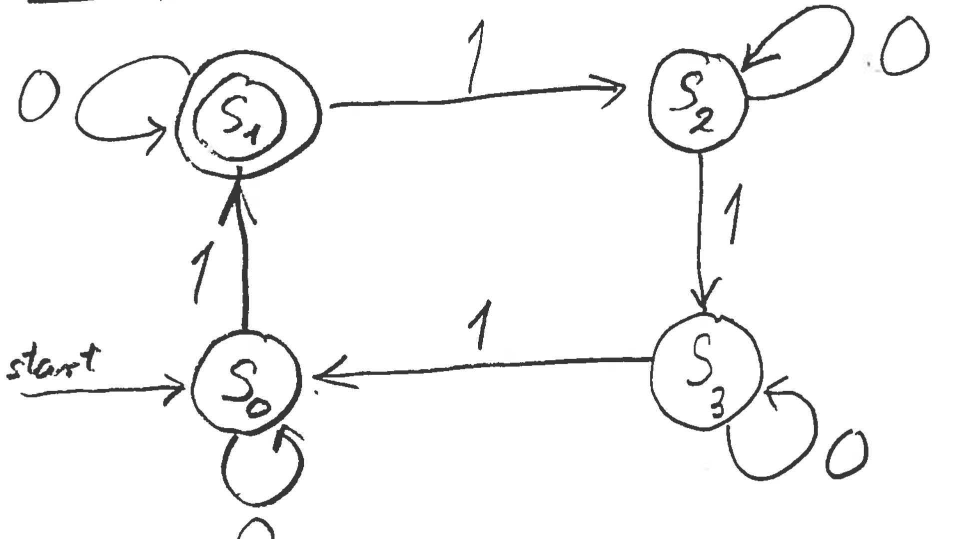
P er gitt ved:

$S \to 0A_{s_1}$, $S \to 1A_{s_1}$

$A_{s_1} \to 0A_{s_2}$, $A_{s_1} \to 1A_{s_1}$, $A_{s_1} \to 0$

$A_{s_2} \to 0A_{s_2}$, $A_{s_2} \to 1A_{s_1}$, $A_{s_2} \to 0$

Oppgave 7



$$0^*1(0 \cup 10^*10^*10^*1)^* = 0^*10^*(10^*10^*10^*10^*)^*$$

Oppgave 8

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1			X	
Deloppgave 2		X		
Deloppgave 3		X		
Deloppgave 4				X
Deloppgave 5	X			
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7			X	X
Deloppgave 8	X		X	