Universitetet i Agder
Fakultet for teknologi og realfag

EKSAMEN

Emnekode:	**Ma-163**
Emnenavn:	**Kalkulus 1**
Dato:	Torsdag 18. desember 2014
Varighet:	09.00 - 15.00
Antall sider inklusive forside:	2
Tillatte hjelpemidler:	Kalkulator uten grafisk vindu og uten minne for tekst. Inntil fire egenproduserte ark.
Merknader:	Nynorskteksten er identisk med bokmålsteksten med omsyn til setningsbygging og ordval. De 22 oppgavene i eksamenssettet teller likt ved sensur.

OPPGAVE 1. Analyse i én variabel.

Vi skal la $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$ og $D_f = (0, 4]$ i denne oppgava.

(a) Finn $f'(x)$ og undersøk fortegnet til $f'(x)$.

(b) Lag ei skisse av grafen til f og finn V_f. Marker området med areal $\int_1^4 f(x)\,dx$ på tegninga.

(c) Vis ved substitusjon at $\int_1^4 f(x)\,dx = 2\int_1^2 x^2 e^x\,dx$.

(d) Beregn nå $\int_1^4 f(x)\,dx$ ved hjelp av delvis integrasjon.

(e) Funksjonen h er definert på $[0, 2]$ ved at $h(x) = \int_1^{x^2} f(t)\,dt$. Bestem $h'(x)$.

(f) Forklar at $f(x)$ har en inversfunksjon $g(y)$ og skriv ned D_g og V_g. (Du skal ikke finne uttrykk for g.) Finn $g'(e)$.

OPPGAVE 2. Litt av hvert.

(a) Argumenter for at $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - 1}{1 - \cos(x)} = 2$.

(b) Forklar ved å bruke et standard greseverdiresultat at $\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{3}{k})^{2k} = e^6$.

(c) Forklar at likninga $x^3 + 2x = 1$ har nøyaktig ei løsning i intervallet $[0, 1]$.

(d) Argumenter for at hvis f er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$, så har f en antiderivert på $[a, b]$.

(e) Vis ved delbrøkoppspalting at $\frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{x^2 + 4}$.

(f) Bestem $\int \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

OPPGAVE 3. Analyse i to variable.

La $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$.

(a) Finn de partielt deriverte til f av 1. og 2. orden og sett opp $\nabla f(x,y)$ og Hessematrisa til f.

(b) Finn det kritiske punktet til f og klassifisér det.

(c) Finn en vektor $\mathbf{N}(x,y)$ som har den egenskapen at den står normalt på grafen til f for hvert punkt (x,y).

(d) Finn lineærapproksimasjonen til f nær punktet $(1,1)$.

Du beveger deg på grafen til f på en vei i konstant høyde 2 over xy-planet. Vi antar koordinatsystemet er lagt slik at x-aksen peker mot øst og y-aksen peker mot nord. La 1 enhet på aksene bety 1 meter. I det du passerer over punktet $(1,1)$ ser du deg rundt.

(e) Hvor bratt er det mot øst og hvor bratt er det mot nord? I hvilken retning er det brattest? Hvor bratt er det i retning nord-øst?

(f) I hvilken retning passerer veien gjennom $(1,1)$? (Vink: Studer tangenten til veien du går på i $(1,1,2)$.)

(g) Hvor er grafen til f høyest over xy-planet og hvor er grafen lavest over xy-planet på og innenfor en sirkel om origo med radius 2?

OPPGAVE 4. Spesielle middelverditeoremer

(a) La $f(x)$ være et vilkårlig andregradspolynom, $f(x) = ax^2 + bx + c$, definert på $[r,s]$. Vis at da gjelder

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \frac{1}{2}[f'(r) + f'(s)].$$

Sekantens stigning over intervallet er altså alltid middelverdien av stigningene til tangentene i endepunktene, for et andregradspolynom.

(b) Vis at det tilsvarende resultatet for tredjegradspolynomer, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, kan skrives

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \frac{1}{2}[f'(r) + f'(s)] - \frac{a}{2}(s - r)^2.$$

Ved å bruke middelverditeoremet på en lur måte, går det an å vise (det skal ikke du gjøre her) at resultatene i (a) og (b) er spesialtilfeller av følgende generelle resultat: *Ta for gitt at f er en tre ganger kontinuerlig, deriverbar funksjon på et intervall $[r,s]$. Da finnes et punkt $c \in (r,s)$ slik at*

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \frac{1}{2}[f'(r) + f'(s)] - \frac{f'''(c)}{12}(s - r)^2.$$

(c) Bestem punktet c når $f(x) = x^4$ og $[r,s] = [0,1]$.

Olav Nygaard — Petter Pettersen