BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT101 - Brukerkurs i matematikk

Mandag 15. desember 2014, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok og kalkulator i samsvar med fakultetet sine regler.

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ på intervallet $[-4, 2]$.

a) Finn $f'(x)$. Avgjør hvor funksjonen er stigende og hvor den er avtagende.

b) Bestem funksjonens lokale og globale maksimums- og minimumspunkter, og angi de tilhørende maksimums- og minimumsverdiene.

c) Bestem $\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x$ og $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^x$.

Oppgave 2

Bestem grenseverdiene:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2\ln(1+x) + 7x}{\sin 3x}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{10 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x - x^{37}}{\ln x + 6^x - 4^x}$$

c) Finn Taylorpolynomet $F_2(x)$ av andre grad, til funksjonen $f(x) = \frac{2+7x}{2+3x}$ om punktet $x = 0$. Beregn $f(0,1)$ og $F_2(0,1)$.

d) Funksjonen $g(t) = 5\cos(3t) - 5\sin(3t)$ kan skrives på formen $g(t) = C\cos(3(t - t_0))$. Bestem C og t_0.

Oppgave 3

Gitt punktene i rommet: $A = (-4, 2, -5)$, $B = (-1, a, -4)$, $C = (-2, 3, -2)$.

a) i) Finn punktet P slik at $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AC}$.

ii) Bestem koordinaten a i punktet B, slik at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er vinkelrett på hverandre.

iii) Hva blir vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ når $a = 0$?

b) i) Beregn kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ uttrykt ved a.

ii) Bruk dette til å bestemme a slik at vektoren $[1, 1, 1]$ ligger i planet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

iii) For denne verdien av a, finn ligningen for planet utspent av punktene A, B og C.

Oppgave 4

Beregn integralene:

$$\text{a)} \int (12x + 18)\sqrt{x^2 + 3x + 5}\, dx, \qquad \text{b)} \int 6x \cos(2x + 5)\, dx$$

c) En ballong har form som en kule. Luft blåses inn i ballongen i en mengde på 3 desiliter ($= 300\,\text{cm}^3$) i sekundet. Hvor raskt øker radien i ballongen når volumet er blitt 3 liter ($= 3000\,\text{cm}^3$)?

Oppgave 5

a) Beverpopulasjonen $N(t)$ i Aust-Agder vokste i forrige århundre etter ligningen gitt ved:

$$\frac{dN}{dt} = 10^{-5} N(8000 - N).$$

I år 1900, som vi lar være tidspunktet $t = 0$, var beverpopulasjonen bare 200 individer. Finn formelen for beverpopulasjonen $N(t)$, der t angir antall år etter 1900.

b) Når hadde beverpopulasjonen vokst til 2000 individer?

Oppgave 6

Gitt funksjonen $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5$.

a) Bestem alle de partielle deriverte av første og annen orden.

b) Finn eventuelle stasjonære punkter til funksjonen, og karakteriser disse.

c) La nå funksjonen være definert i området $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$ og $x + y \leq 4$. Har funksjonen et globalt maksimums- og et globalt minimumspunkt i dette området? Grunngi svaret. Finn de globale ekstremalpunktene i dette området og deres tilhørende ekstremalverdier.

Oppgave 7

En kaffekopp har form som en rett sylinder. La r være radien i den sirkulære grunnflaten, og h høyden til kaffekoppen. Vi antar at koppen er helt full med kaffe. Det forsvinner tre ganger så mye varme ut fra overflaten av kaffen som fra sideflaten. Vi antar at ingen varme forsvinner gjennom bunnen.

a) Anta at koppen har $100\pi\,\mathrm{cm}^3$ kaffe (som er $\approx 3,14$ desiliter). Anta også at det fra sideflaten forsvinner c varmeenheter pr. cm^2 pr. minutt. Vis at varmetapet T er gitt ved formelen:

$$T = 200c\pi/r + 3c\pi r^2.$$

b) Hva må radius r og høyde h være slik at varmetapet blir minst mulig?

Lykket til! Gunnar Fløystad Jarle Berntsen