UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 14. mai 2014, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok ("Calculus - a complete course" av R. A. Adams og C. Essex, 8. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1-5) og består av 16 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (oppgave 3a teller for eksempel like mye som hele oppgave 1).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Finn polarrepresentasjonen til $z = -3 + \sqrt{3}i$ og til $w = 3 + \sqrt{3}i$. Regn ut $\dfrac{z}{w}$.

Oppgave 2

Gitt et tall x, la $L(x)$ være den rette linjen gjennom origo som skjærer grafen til $y = \sin x$ i punktet $(x, \sin x)$. La $\theta(x)$ være vinkelen mellom $L(x)$ og x-aksen. Hva er endringsraten til θ med hensyn på x?

Oppgave 3

a Bruk delbrøksoppspaltning og integrér for å vise at

$$\int \frac{2x^2+6x-12}{(x+1)(x^2-9)}dx = \ln(x+1)^2 + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

b Løs initialverdiproblemet:

$$\begin{cases} (x+1)(x^2-9)\dfrac{dy}{dx} = (2x^2+6x-12)y \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Hint: Bruk svaret fra **3a**.

Oppgave 4

a Finn $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$, eller vis at grenseverdien ikke eksisterer.

b Vis at $\lim_{x\to 1+} (x-1)(\ln(x-1))^2 = 0$.

c La g være funksjonen definert på $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ ved

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < -1 \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{for } x = 1 \\ (x-1)(\ln(x-1))^2 & \text{for } 1 < x. \end{cases}$$

For hvilke punkt i $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ er g kontinuerlig?
Er g en kontinuerlig funksjon?

Oppgave 5

I denne oppgaven studerer vi funksjonen e^{-x^2}, definert på $(-\infty, \infty)$. *Deloppgavene kan løses uavhengig av hverandre.* Vær oppmerksom på at det ikke er mulig å finne et eksplisitt uttrykk for det ubestemte integralet $\int e^{-x^2} dx$.

a La $f(x) = e^{-x^2}$, regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$. Lag fortegnsskjema for f, f' og f'' og skissér grafen til f.

b Bruk den formelle definisjonen av grenseverdier til å vise at $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$.
Hint: Du kan bruke (uten å vise det) at $e^{-k} < \frac{1}{k}$ for alle reelle tall k.

c Hvor mange løsninger har likningen $e^{-x^2} = x$? Gi en god begrunnelse for svaret.

d Finn en tilnærmet løsning til likningen $e^{-x^2} = x$ ved å bruke to iterasjoner av Newtons metode med $x_0 = 0{,}5$.

e Finn Taylorpolynomet $P_2(x)$ av andre grad til funksjonen e^{-x^2} om $x = 0$. Finn så en tilnærming til $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ ved å bruke $P_2(x)$.

f Et feilestimat for tilnærmingen i **5e** er gitt ved

$$0{,}16 < \left| \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx - \int_{-1}^{1} P_2(x) dx \right| < 0{,}17$$

(du trenger ikke vise dette). Hvor mange intervall trengs for å være sikker på at trapesmetoden gir en bedre tilnærming til $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ enn tilnærmingen over?

g Finn en tilnærming til $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ ved å bruke trapesmetoden med fire intervall.

h La $F(x) = \int_{1}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$. Finn $F'(x)$.

i Begrunn om det uegentlige integralet $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$ konvergerer eller divergerer.

Lykke til!

Mirjam Solberg