UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Torsdag 11. desember 2014.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (8 poeng)

Et lineært ligningssystem er gitt ved at

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 2x + \alpha y + 3z &= \alpha + 1, \end{aligned}$$

der α er en konstant. Finn α slik at ligningssystemet har uendelig mange løsninger. Finn alle løsningene i dette tilfellet.

Oppgave 2 (8 poeng)

Finn den generelle løsningen på differensligningen

$$2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1.$$

Hva blir $\lim_{n\to\infty} x_n$?

Oppgave 3 (8 poeng)

En funksjon f tilfredstiller

$$f'(x) = e^x \sin(x), \qquad f(0) = 1.$$

Finn $f(x)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4

Vi ser på differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x. \tag{1}$$

4a (4 poeng)

Vis at $y_1(x) = x - 2$ er en løsning av (1).

4b (6 poeng)

Finn den generelle løsningen på den homogene ligningen

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

og kall denne y_2.

4c (5 poeng)

Vis at $y = y_1 + y_2$ løser (1) (Du trenger ikke bruke uttrykket for y_2 funnet i **4b** for dette).

4d (5 poeng)

Finn løsningen på (1) som er slik at $y(0) = y'(0) = 0$.

Oppgave 5

På et fly som flyr med hastighet $v(t)$ virker en motstandskraft som er proporsjonal med v^2, og har motsatt retning. I tillegg virker en skyvekraft fra motoren. Vi kaller denne kraften F, og vi antar at F er konstant. Da sier Newtons 2. lov at

$$mv' = F - kv^2,$$

der m er massen til flyet. Vi antar at $m = m(t) = m_0 - t$, siden flyet bruker opp brennstoff med en konstant rate mens det flyr.

5a (8 poeng)

Anta i resten av oppgaven at $F = 4$, $k = 1$, $m_0 = 1$ og $v(0) = 0$. Finn $v(t)$.

5b (9 poeng)

Anta at halvparten av den initielle vekten til flyet er drivstoff, derfor vil alt drivstoffet være oppbrukt når $t = 1/2$, og dermed stopper motoren og $F = 0$. Forklar at for $t > 1/2$ så vil hastigheten tilfredsstille

$$\frac{1}{2}v' = -v^2,$$

og finn en formel for hastigheten til flyet for $t > 1/2$.

SLUTT

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Onsdag 10. desember 2014.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Dersom $f(x, y) = x\sin(xy^2)$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $\sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2)$
B) $x\cos(xy^2)$
C) $2x^2y\cos(xy^2)$
D) $\sin(xy^2) + 2x^2y^2\cos(xy^2)$
E) $\cos(xy^2)$

Oppgave 2. (3 poeng) Dersom $f(x, y) = xe^{xy}$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (1, 1)$ og $\mathbf{r} = (-2, 1)$, lik:

A) e
B) $7e$
C) -2
D) $12e$
E) $-3e$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) I punktet $(2,-1)$ vokser funksjonen $f(x,y) = x^3y + 2y^2$ raskest i retningen:

A) $(2,-1)$
B) $(-3,1)$
C) $(1,-2)$
D) $(1,1)$
E) $(2,2)$

Oppgave 4. (3 poeng) Volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a} = (1,0,-1)$, $\mathbf{b} = (1,2,1)$, $\mathbf{c} = (2,-1,3)$ er:

A) 7
B) 10
C) 14
D) 12
E) 15

Oppgave 5. (3 poeng) Integralet $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ er lik:

A) $\arccos x + C$
B) $x \arcsin x + C$
C) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$
D) $\sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$
E) $(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

Oppgave 6. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)^2}$, må du:

A) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{C}{(x^2+1)^2}$
B) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}$
C) først polynomdividere
D) finne konstanter A, B, C, D, E slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$
E) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{D}{(x^2+1)^2}$

Oppgave 7. (3 poeng) Den deriverte til funksjonen $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$ er:

A) $\frac{\sin x}{1+x^2}$
B) $\frac{\sin x^2}{1+x^4}$
C) $\frac{x^2 \sin x^2}{1+x^4}$
D) $\frac{2x \sin x^2}{1+x^4}$
E) $2x \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, dreies om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er

A) $2\pi^2$
B) π^3
C) π
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$ er lik:

A) $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$
B) $2\cosh(\sqrt{x}+1) + C$
C) $\ln(x+1) - \ln(\sqrt{x}+1) + C$
D) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x} + C$
E) $2\arctan\sqrt{x} + C$

Oppgave 10. (3 poeng) Integralet $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\, dx$:

A) er lik -1
B) er lik $-\frac{1}{2}$
C) er lik $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) divergerer
E) er lik $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11.

a) (10 poeng) Finn kvadratrøttene til det komplekse tallet $2 + 2i\sqrt{3}$ og skriv dem på formen $z = a + ib$ der $a, b \in \mathbb{R}$.

b) (10 poeng) Finn løsningene til ligningen

$$iz^2 + 2z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 0$$

og skriv dem på formen $z = a + ib$ der $a, b \in \mathbb{R}$.

Oppgave 12. I denne oppgaven er A matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Vis *ved regning* at den inverse matrisen til A er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Du må vise hvordan du kommer frem til svaret ved regning og ikke bare bruke en kalkulator til å invertere matrisen.)

b) (10 poeng) I en innsjø lever det tre fiskeslag X, Y og Z. Vi kan tenke oss den samlede bestanden som en vektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

der x er antall fisk av slag X, y er antall fisk av slag Y og z er antall fisk av slag Z. Dersom bestanden et år er $\mathbf{r}$, regner forskerne at bestanden året etter vil være $A\mathbf{r}$. Dersom bestanden et år er

$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix},$$

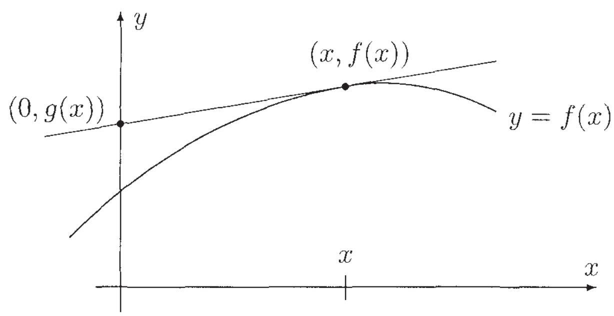
hvor stor var den det *foregående* året?

Oppgave 13 (10 poeng) Løs integralet

$$\int \ln(x^2 + 1)\, dx$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 14. I denne oppgaven tenker vi oss at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en funksjon med kontinuerlig annenderivert. På figuren har vi tegnet inn tangenten til f i et punkt $(x, f(x))$. Vi lar $g(x)$ være y-koordinaten til det punktet der tangenten skjærer y-aksen.



a) (10 poeng) Vis at $g(x) = f(x) - xf'(x)$. Vis også at dersom f er konkav, så er $g(0)$ den minste verdien til g, og at dersom f er konveks, så er $g(0)$ den største verdien til g.

b) (10 poeng) Vis at

$$\int_0^a g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx - af(a)$$

for alle $a \in \mathbb{R}$.

SLUTT

FORMELSAMLING FOR MAT 1100 OG MAT-INF 1100

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$
Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$
De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Anvendelser av integrasjon

Volum av omdreiningslegemer: om x-aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$

om y-aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$

Buelengde: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

Lineær algebra og funksjoner av flere variable

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$

Differens- og differensialligninger

Annenordens differensligning $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$:

$$x_n = \begin{cases} C r_1^n + D r_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ C r^n + D n r^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C \rho^n \cos(n\theta) + D \rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

Annenordens differensialligning $y'' + p y' + q y = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} C e^{r_1 x} + D e^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ C e^{r x} + D x e^{r x} & \text{hvis én reell rot } r \\ C e^{a x} \cos(bx) + D e^{a x} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Numeriske formler

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$

$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Trapesmetoden: $\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$

$+ 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$

Simpsons formel: $\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$

$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)$

Eulers metode: Førsteordens ligning: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Annenordens ligning:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + h D y_{n-1} \\ D y_n = D y_{n-1} + h g(x_{n-1}, y_{n-1}, D y_{n-1}) \end{cases}$$

Kandidatnummer:____________

Svarark til eksamen i MAT1100,
onsdag 10.12.2014 kl. 09.00–13.00.

Les gjennom informasjonen under før du begynner å krysse av.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

Oppgaveteksten er på eget ark.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	A1	B1	C1	D1	E1
2	A2	B2	C2	D2	E2
3	A3	B3	C3	D3	E3
4	A4	B4	C4	D4	E4
5	A5	B5	C5	D5	E5
6	A6	B6	C6	D6	E6
7	A7	B7	C7	D7	E7
8	A8	B8	C8	D8	E8
9	A9	B9	C9	D9	E9
10	A10	B10	C10	D10	E10